Ueber

ein Attractionsproblem.

Mathematische

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung

der

philosophischen Doctorwürde

vorgelegt der

philosophischen Facultät

der

Universität zu Rostock

von

Wilhelm Hilfer

aus Berlin.

Rostock 1872.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553622_0260

Seinem

leider zu früh heimgegangenen

väterlichen Freunde und verehrten Lehrer

dem

PROFESSOR DR. FRIEDRICH KŒHLER

weiland Director der Friedrich-Werderschen Gewerbeschule
zu Berlin

aus Dankbarkeit gewidmet.

Aufgabe.

Ein fester Punkt zieht zwei andere, welche durch eine starre, nicht schwere Linie verbunden sind, nach dem Newton'schen Gesetze an. Die Bewegung dieser starren Linie zu bestimmen. Unter welcher Annahme lässt sich die Rechnung durchführen?

§ 1. Einleitung.

Die vorliegende Aufgabe ist die directe Umkehrung jenes berühmten Problems, mit dem sich seit mehr als einem Jahrhundert die bedeutendsten Mathematiker mit Vorliebe beschäftigt haben, nämlich: „die Trajectorie eines Massenpunktes zu bestimmen, der von zwei festen Centren nach dem Newton'schen Gesetze angezogen wird". Euler[1]) behandelte zuerst die letztere Aufgabe, und zwar unter der Annahme, dass die Bewegung in einer Ebene vor sich gehe; Lagrange[2]) gelangte dann zu einer neuen Lösung, die nicht mehr auf den Fall der Ebene beschränkt ist, und zeigte deren Anwendbarkeit sogar in dem Falle, dass noch ein dritter fester Punkt in der Mitte der beiden ersten vorhanden ist, der den bewegten im directen Verhältniss der einfachen Entfernung anzieht. Legendre[3]) zog aus seiner Theorie der elliptischen Functionen neue Entwicklungen, durch die er die Lösung des Problems beträchtlich vervollständigte. Jacobi[4]) hat mittels seines Princips des letzten Multiplicators die Euler'sche

[1]) Abhandl. d. Berliner Akad. v. Jahre 1760.
[2]) *Mécanique analytique* herausgeg. von Bertrand *tome II page* 93.
[3]) *Traité des fonct. ellipt. tome I page* 411.
[4]) Vorlesungen über Dynamik herausgeg. von Clebsch. S. 221.

Lösung in einfacherer Weise hergeleitet. Liouville hat in dem *Mémoire*[1]: „*sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer*“ — zwei Integrationsmethoden aufgestellt, die auf das Problem der zwei festen Centren anwendbar sind. Die Ausdehnung der zweiten dieser Methoden auf den Fall des Raumes, die von Liouville nur angedeutet war, ist von Serret[2]) geschehen.

Die schwierige Aufgabe der zwei festen Centren ist also auf Quadraturen zurückgeführt. Die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen ist im Falle der Ebene gleich zwei, im Falle des Raumes gelingt es, sie auch auf zwei zu reduciren. In der gegenwärtigen Aufgabe: „die Bewegung der starren Verbindungslinie zweier Punkte zu bestimmen, die von einem festen Punkte nach dem allgemeinen Gravitationsgesetze angezogen werden“ — steigt die Zahl der unabhängigen Variabeln für den allgemeinen Fall des Raumes bis auf 5, da die eine der 6 räumlichen Coordinaten der zwei beweglichen Punkte durch die Bedingung der constanten Entfernung beider eliminirt werden kann, und für den Fall der Ebene ist ihre Anzahl aus demselben Grunde 3, also noch um eins grösser, als in jenem zuerst besprochenen Problem. Ueberdies complicirt sich die Rechnung noch dadurch bedeutend, dass in den Differentialgleichungen der Bewegung die Bedingung der constanten Entfernung der beiden beweglichen Punkte zu den anziehenden Kräften noch die mit einem, nach der Lage der starren Linie veränderlichen, Factor λ multiplicirten partiellen Differentialquotienten einer Function zweiten Grades der Coordinaten hinzufügt, und da auch die Betrachtung der Bewegung des Schwerpunktes des festen Systems in dem allgemeinen Fall der Bewegung im Raume und in der Ebene, wie gezeigt werden wird, keine Vortheile darbietet, so scheint überhaupt eine vollständige allgemeine Lösung des Problems, d. h. eine Reduction auf Quadraturen, unmöglich zu sein. Die letztere gelingt nur unter der Annahme, dass die drei Punkte anfänglich in gerader Linie liegen, und dass ferner die Anfangsgeschwindigkeit der starren Linie der Art ist, dass die Linie bei ihrer Bewegung immer in der ursprünglichen Richtung bleibt.

Im Folgenden ist die Rechnung, so weit sie ausführbar erschien, zuerst für den allgemeinen Fall des Raumes, dann im zweiten Abschnitte für den Fall gegeben, wo die starre Linie stets in der anfänglichen, durch die drei Punkte bestimmten Ebene bleibt, was, wie bewiesen werden wird, nur dann eintreten kann, wenn

---

[1]) *Liouville journal des math. tome XI & XII.*
[2]) *Liouville journal des math. tome XIII page* 30.

die Constanten der drei Flächenintegrale sämmtlich verschwinden. Die Untersuchung der Bewegung der starren Linie in dem erwähnten Specialfalle der Bewegung „in der eigenen Richtung", wo die Rechnung sich vollständig durchführen lässt, wird den Gegenstand des dritten Abschnittes dieser Abhandlung bilden.

Erster Abschnitt.

Die Bewegung im Raume.

§ 2. Die Differentialgleichungen der Bewegung der beiden beweglichen Punkte bezogen auf den Ort des festen Punktes.

Wir nehmen den festen Punkt A zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen räumlichen Coordinatensystems. Die Coordinaten der beiden beweglichen Punkte B und C seien x_1 y_1 z_1 und x_2 y_2 z_2, ihre Entfernungen von A r_1 und r_2. Die constante Länge von B C sei l. Wir setzen die Masse von A gleich 1, die von B und C gleich m_1 und m_2. Die von A ausgehende und den Punkt B bewegende Kraft ist nach dem Newton'schen Gesetze $-\frac{fm_1}{r_1^2}$. Der Factor f giebt darin die Grösse der Anziehung an, welche in der Einheit der Entfernung von der Masseneinheit ausgeht. Ebenso ist die den Punkt C angreifende und nach A gerichtete Kraft $-\frac{fm_2}{r_2^2}$. Wir zerlegen jede der beiden Kräfte in ihre Componenten parallel den Coordinatenaxen, so werden diese für B:

$$-\frac{fm_1}{r_1^2}\cdot\frac{x_1}{r_1} = fm_1\frac{d\frac{1}{r_1}}{dx_1} \quad (\text{da } r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}),\ fm_1\frac{d\frac{1}{r_1}}{dy_1},\ fm_1\frac{d\frac{1}{r_1}}{dz_1},$$

und für C:

$$fm_2\frac{d\frac{1}{r_2}}{dx_2},\ fm_2\frac{d\frac{1}{r_2}}{dy_2},\ fm_2\frac{d\frac{1}{r_2}}{dz_2}.$$

Diese 6 Componenten sind die partiellen Ableitungen nach x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 derselben Function

$$\frac{fm_1}{r_1} + \frac{fm_2}{r_2},$$

die wir als Kräftefunction mit U bezeichnen wollen.

Zwischen den Coordinaten $x_1\,y_1\,z_1$ und $x_2\,y_2\,z_2$ besteht die Bedingungsgleichung:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l^2 = 0,$$

für die wir abkürzend $F = 0$ setzen wollen.

Die Differentialgleichungen der Bewegung der beiden materiellen Punkte B und C, die der Bedingung $F = 0$ unterworfen sind, werden dann nach Lagrange:

$$(1.)\quad \begin{cases} m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{dU}{dx_1} + \lambda \frac{dF}{dx_1} = -\frac{fm_1x_1}{r_1^3} + 2\lambda (x_1 - x_2) \\ m_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} = \frac{dU}{dy_1} + \lambda \frac{dF}{dy_1} = -\frac{fm_1y_1}{r_1^3} + 2\lambda (y_1 - y_2) \\ m_1 \frac{d^2z_1}{dt^2} = \frac{dU}{dz_1} + \lambda \frac{dF}{dz_1} = -\frac{fm_1z_1}{r_1^3} + 2\lambda (z_1 - z_2) \\ m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{dU}{dx_2} + \lambda \frac{dF}{dx_2} = -\frac{fm_2x_2}{r_2^3} - 2\lambda (x_1 - x_2) \\ m_2 \frac{d^2y_2}{dt^2} = \frac{dU}{dy_2} + \lambda \frac{dF}{dy_2} = -\frac{fm_2y_2}{r_2^3} - 2\lambda (y_1 - y_2) \\ m_2 \frac{d^2z_2}{dt^2} = \frac{dU}{dz_2} + \lambda \frac{dF}{dz_2} = -\frac{fm_2z_2}{r_2^3} - 2\lambda (z_1 - z_2) \end{cases}$$

worin λ ein mit der Lage der starren Linie BC veränderlicher Factor ist, der die Spannung in derselben ausdrückt.

§ 3. Vier Integrale der Differentialgleichungen der Bewegung in endlicher Form.

Multipliciren wir die 6 Gleichungen (1) resp. mit $2dx_1$, $2dy_1$, $2dz_1$, $2dx_2$ etc., addiren sie darauf und integriren, so erhalten wir:

$$(2.)\quad m_1\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right] + m_2\left[\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_2}{dt}\right)^2\right] = 2(U - h)$$

wo h eine willkürliche Constante bedeutet.

Die Gleichung (2) ist der Ausdruck für das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft, dessen Giltigkeit in unserem Falle wir auch sofort daraus hätten schliessen können, dass die Kräftefunction

$$U = \frac{fm_1}{r_1} + \frac{fm_2}{r_2}$$

die Zeit t nicht explicite enthält.

Aus den Gleichungen (1) leitet man leicht die Formeln her:

$$(3.)\quad \begin{cases} m_1\left(y_1\frac{d^2z_1}{dt^2} - z_1\frac{d^2y_1}{dt^2}\right) = -m_2\left(y_2\frac{d^2z_2}{dt^2} - z_2\frac{d^2y_2}{dt^2}\right) = \\ \qquad -2\lambda(y_1z_2 - z_1y_2) \\ m_1\left(z_1\frac{d^2x_1}{dt^2} - x_1\frac{d^2z_1}{dt^2}\right) = -m_2\left(z_2\frac{d^2x_2}{dt^2} - x_2\frac{d^2z_2}{dt^2}\right) = \\ \qquad -2\lambda(z_1x_2 - x_1z_2) \\ m_1\left(x_1\frac{d^2y_1}{dt^2} - y_1\frac{d^2x_1}{dt^2}\right) = -m_2\left(x_2\frac{d^2y_2}{dt^2} - y_2\frac{d^2x_2}{dt^2}\right) = \\ \qquad -2\lambda(x_1y_2 - y_1x_2) \end{cases}$$

Diese geben durch Integration:

$$(4.)\quad \begin{cases} m_1\left(y_1\frac{dz_1}{dt} - z_1\frac{dy_1}{dt}\right) + m_2\left(y_2\frac{dz_2}{dt} - z_2\frac{dy_2}{dt}\right) = c_1 \\ m_1\left(z_1\frac{dx_1}{dt} - x_1\frac{dz_1}{dt}\right) + m_2\left(z_2\frac{dx_2}{dt} - x_2\frac{dz_2}{dt}\right) = c_2 \\ m_1\left(x_1\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dx_1}{dt}\right) + m_2\left(x_2\frac{dy_2}{dt} - y_2\frac{dx_2}{dt}\right) = c_3 \end{cases}$$

wo $c_1 c_2 c_3$ willkürliche Constanten sind.

Durch die Gleichungen (4) ist das Princip der Erhaltung der Flächenräume als im vorliegenden Falle bestehend dargethan.

§ 4. Weitere Folgerungen aus den Differentialgleichungen der §§ 2 u. 3.

Multipliciren wir die Gleichungen (3) resp. mit $x_2 y_2 z_2$ und addiren sie dann, so erhalten wir:

$$(5)\ldots\ldots\ldots \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_1'' \\ y_1 & y_2 & y_1'' \\ z_1 & z_2 & z_1'' \end{vmatrix} = 0$$

worin $x_1'' = \frac{d^2x_1}{dt^2}$ etc. gesetzt ist. Ebenso ergiebt sich aus (3), wenn wir resp. mit $x_1 y_1 z_1$ multipliciren und dann addiren:

$$(6)\ldots\ldots\ldots \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_2'' \\ y_1 & y_2 & y_2'' \\ z_1 & z_2 & z_2'' \end{vmatrix} = 0$$

Verfahren wir dann genau ebenso mit den Gleichungen (4), so folgt:

$$(7)\ldots -m_1 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_1' \\ y_1 & y_2 & y_1' \\ z_1 & z_2 & z_1' \end{vmatrix} = c_1x_2 + c_2y_2 + c_3z_2$$

und:

$$(8)\ldots +m_2 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_2' \\ y_1 & y_2 & y_2' \\ z_1 & z_2 & z_2' \end{vmatrix} = c_1x_1 + c_2y_1 + c_3z_1$$

worin $x_1' y_1'$ etc. $= \frac{dx_1}{dt}\frac{dy_1}{dt}$ etc. bedeuten.

Nehmen wir die Ableitungen der Gleichungen (7) und (8) nach t, so erhalten wir unter Berücksichtigung von (5) und (6) noch die interessanten Differentialgleichungen:

$$(9)\ldots +m_1 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_1' & x_2' \\ y_1 & y_1' & y_2' \\ z_1 & z_1' & z_2' \end{vmatrix} = c_1x_2' + c_2y_2' + c_3z_2'$$

und:

$$(10)\ldots -m_2 \cdot \begin{vmatrix} x_2 & x_1' & x_2' \\ y_2 & y_1' & y_2' \\ z_2 & z_1' & z_2' \end{vmatrix} = c_1x_1' + c_2y_1' + c_3z_1'$$

Aus den Gleichungen (1) zieht man leicht noch die Formeln:

$$(11.)\quad \begin{cases} m_1\left(y_2\frac{d^2z_1}{dt^2} - z_2\frac{d^2y_1}{dt^2}\right) = +(y_1z_2 - z_1y_2)\left(\frac{fm_1}{r_1^3} - 2\lambda\right) \\ m_2\left(y_1\frac{d^2z_2}{dt^2} - z_1\frac{d^2y_2}{dt^2}\right) = -(y_1z_2 - z_1y_2)\left(\frac{fm_2}{r_2^3} - 2\lambda\right) \end{cases}$$

und folgert daraus:

$$(12.)\quad \frac{d}{dt}(y_1z_2' - z_2y_1' + y_2z_1' - z_1y_2') = (y_1z_2 - z_1y_2) \times \left[f\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right) + 2\lambda\frac{m_1 - m_2}{m_1 \cdot m_2}\right]$$

Zwei entsprechende Gleichungen erhält man zwischen z und x und zwischen x und y.

Da die Kräftefunction U in unserem Falle eine homogene Function der 6 Coordinaten $x_1\, y_1$ etc. von der Dimension -1 ist, so ist nach einer bekannten Eigenschaft der homogenen Functionen:

$$x_1\frac{dU}{dx_1} + y_1\frac{dU}{dy_1} + z_1\frac{dU}{dz_1} + x_2\frac{dU}{dx_2} + y_2\frac{dU}{dy_2} + z_2\frac{dU}{dz_2} = -U$$

Setzen wir hierin die Werthe der partiellen Ableitungen von U, wie sie sich aus den Differentialgleichungen der Bewegung (1) ergeben, ein, so erhalten wir:

$$m_1\left(x_1\frac{d^2x_1}{dt^2} + y_1\frac{d^2y_1}{dt^2} + z_1\frac{d^2z_1}{dt^2}\right) + m_2\left(x_2\frac{d^2x_2}{dt^2} + y_2\frac{d^2y_2}{dt^2} + z_2\frac{d^2z_2}{dt^2}\right) = -U + 2\lambda\left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2\right]$$
$$= -U + 2\lambda \cdot l^2$$

Addiren wir zu dieser Gleichung die der lebendigen Kraft (2), so wird die linke Seite ein vollständiges Differentiale, und es folgt:

$$m_1\frac{d}{dt}\left(x_1\frac{dx_1}{dt} + y_1\frac{dy_1}{dt} + z_1\frac{dz_1}{dt}\right) + m_2\frac{d}{dt}\left(x_2\frac{dx_2}{dt} + y_2\frac{dy_2}{dt} + z_2\frac{dz_2}{dt}\right) = U - 2h + 2\lambda l^2$$

oder:

$$m_1\frac{d^2}{dt^2}\left(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2\right) + m_2\frac{d^2}{dt^2}\left(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2\right) = 2U - 4h + 4\lambda l^2$$

oder:

$$(13.)\ \ldots\ \frac{d^2}{dt^2}\left(m_1r_1^2 + m_2r_2^2\right) = 2U - 4h + 4\lambda l^2$$

Man kann aus den Differentialgleichungen (1) noch merkwürdige Gleichungen ableiten, welche von den Massen m_1 und m_2 gänzlich unabhängig sind. Multipliciren wir nämlich die zweite der Gleichungen (1) mit $z_1 - z_2$, die dritte mit $y_1 - y_2$, so ergiebt sich durch Subtraction, indem sich m_1 auf beiden Seiten hebt:

$$(y_1 - y_2)z_1'' - (z_1 - z_2)y_1'' = -\frac{f}{r_1^3}(y_1z_2 - z_1y_2)$$

Ebenso folgt aus der fünften und sechsten der Gleichungen (1):

$$(y_1 - y_2)z_2'' - (z_1 - z_2)y_2'' = -\frac{f}{r_2^3}(y_1z_2 - z_1y_2)$$

Subtrahiren wir ferner diese beiden Gleichungen, so erhalten wir:

$$(14.)\quad \frac{d}{dt}\begin{vmatrix} y_1 - y_2, & (y_1 - y_2)' \\ z_1 - z_2, & (z_1 - z_2)' \end{vmatrix} = -(y_1 z_2 - z_1 y_2) \times f\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right)$$

worin wieder: $(y_1 - y_2)' = \frac{d}{dt}(y_1 - y_2)$ etc.

Zwei ähnliche Gleichungen leiten sich für die Variabeln z und x einerseits und x und y andrerseits her.

Die auf der rechten Seite dieser drei Gleichungen vorkommenden Factoren: $y_1 z_2 - z_1 y_2$, etc. sind die doppelten Flächenzahlen der Projectionen des von den beiden *radii vectores* r_1 und r_2 und der starren Linie l gebildeten Dreiecks auf die drei Coordinatenebenen; wir wollen sie daher durch resp. $2D_{yz}$, $2D_{zx}$, $2D_{xy}$ bezeichnen. Seien ferner die Projectionen der starren Linie l auf die drei Coordinatenebenen l_{yz}, l_{zx}, l_{xy} und die Winkel dieser Projectionen in ihren bezüglichen Ebenen mit der Y-, Z-, und X-Axe resp. φ_1, φ_2, φ_3, so dass:

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &= l_{yz}\, cos\varphi_1 = l_{xy}\, sin\varphi_3 \\ z_1 - z_2 &= l_{yz}\, sin\varphi_1 = l_{zx}\, cos\varphi_2 \\ x_1 - x_2 &= l_{zx}\, sin\varphi_2 = l_{xy}\, cos\varphi_3 \end{aligned}$$

so ergiebt sich:

$$\begin{vmatrix} y_1 - y_2, & (y_1 - y_2)' \\ z_1 - z_2, & (z_1 - z_2)' \end{vmatrix} = l_{yz}^2 \cdot \varphi_1'$$

und ähnlich für die anderen Determinanten auf der linken Seite der drei Gleichungen (14). Diese lassen sich daher in der Form schreiben:

$$(14a.)\quad \begin{cases} \frac{d}{dt}(l_{yz}^2 \cdot \varphi_1') = -2D_{yz} \cdot f\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right) \\ \frac{d}{dt}(l_{zx}^2 \cdot \varphi_2') = -2D_{zx} \cdot f\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right) \\ \frac{d}{dt}(l_{xy}^2 \cdot \varphi_3') = -2D_{xy} \cdot f\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right) \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt die Proportion:

$$D_{yz} : D_{zx} : D_{xy} = (l_{yz}^2 \cdot \varphi_1')' : (l_{zx}^2 \cdot \varphi_2')' : (l_{xy}^2 \cdot \varphi_3')'$$

indem wir die Ableitungen nach t nur durch Striche andeuten.

Wenn wir die drei Gleichungen (12) zu den entsprechenden drei Gleichungen (14) addiren, so resultiren daraus noch drei neue Formeln:

$$(15.)\quad \begin{cases} \frac{d}{dt}(y_1 z_1' - z_1 y_1' + y_2 z_2' - z_2 y_2') = +2\lambda \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 \cdot m_2} \cdot (y_1 z_2 - z_1 y_2) \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

§ 5. Bemerkungen über die Lösung des Problems und Bestimmung der Spannkraft λ.

Denkt man sich eine der 6 Coördinaten vermittelst der Bedingungsgleichung $F = 0$ durch die fünf andern ausgedrückt, z. B. z_2, und den aus der Gleichung

$$m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} = -\frac{f m_2 z_2}{r_2^3} - 2\lambda (z_1 - z_2)$$

hervorgehenden Werth von λ in die fünf ersten Differentialgleichungen der Bewegung (1) eingesetzt, so erhält man 5 Differentialgleichungen zweiter Ordnung zwischen den 5 von einander unabhängigen Coordinaten $x_1\, y_1\, z_1\, x_2\, y_2$ und der Zeit t. Die vollständige Integration derselben führt zu zehn verschiedenen Gleichungen mit ebenso vielen willkürlichen Constanten, aus denen die 5 Coordinaten und deren erste Differentialquotienten nach t als Funktionen von t bestimmt werden können. Von den 10 Integralen sind bis jetzt nur 4, und zwar in endlicher Form, (2) und (4), aufgestellt. Die übrigen 6 Integrale, die sich allgemein nicht weiter angeben lassen, werden wohl nur in der Form von unendlichen Reihen — wie bei dem Problem der drei Körper — dargestellt werden können, und die Form der Lösung wird je nach den bestimmten Voraussetzungen über den relativen Werth der in der Aufgabe vorkommenden Constanten verschieden ausfallen.

Man hätte natürlich auch bei Bestimmung der 5 von einander unabhängigen Coordinaten und ihrer Differentialquotienten als Funktionen von t statt von den 6 Differentialgleichungen der Bewegung (1) von 6 andern Gleichungen ausgehen können, die durch verschiedene Combinationen aus den Gleichungen (1) entstehen, sofern dieselben, abgesehen von der Bedingungsgleichung $F = 0$, unter sich unabhängig sind, z. B. von den 4 Gleichungen (2) und (4), einer der Gleichungen (3) und der Gleichung (13).

Zur Bestimmung der Spannkraft λ, ausgedrückt durch die 6 Coordinaten der zwei Punkte und ihre nach den Coordinatenaxen zerlegten Geschwindigkeiten, erhält man eine in Bezug auf λ lineare Gleichung, indem man die Werthe (1) der zweiten Differentialquotienten aus den Coordinaten und der Zeit in das zweite Differentiale der Bedingungsgleichung $F = 0$ nach t einsetzt, nämlich die Gleichung:

$$(x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 + (z_1' - z_2')^2 - (x_1 - x_2)\, f\left(\frac{x_1}{r_1^3} - \frac{x_2}{r_2^3}\right)$$
$$- (y_1 - y_2)\, f\left(\frac{y_1}{r_1^3} - \frac{y_2}{r_2^3}\right) - (z_1 - z_2)\, f\left(\frac{z_1}{r_1^3} - \frac{z_2}{r_2^3}\right) +$$
$$2\lambda \left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2\right] \cdot \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = 0$$

oder:

$$(x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 + (z_1' - z_2')^2 - f \cdot \frac{r_1^2 - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)}{r_1^3}$$

$$- f \cdot \frac{r_2^2 - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)}{r_2^3} + 2\lambda l^2 \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} = 0$$

Nun ist aber:

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = r_1 r_2 \cos(r_1, r_2)$$

und:
$$l^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos(r_1, r_2)$$

folglich:

$$r_1 r_2 \cos(r_1, r_2) = \frac{r_1^2 + r_2^2 - l^2}{2}$$

$$r_1^2 - r_1 r_2 \cos(r_1, r_2) = \frac{r_1^2 - r_2^2 + l^2}{2}$$

$$r_2^2 - r_1 r_2 \cos(r_1, r_2) = \frac{r_2^2 - r_1^2 + l^2}{2}$$

Mithin ergiebt sich für λ:

$$(16) \ldots\ldots \lambda = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{1}{2 \cdot l^2} \times$$

$$\left\{ \frac{f}{2} \left[(r_1^2 - r_2^2) \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) + l^2 \left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{1}{r_2^3} \right) \right] - \left[(x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 + (z_1' - z_2')^2 \right] \right\}$$

§ 6. Besondere Annahme über die Werthe der Constanten c_1 c_2 c_3 der Flächenintegrale.

Sind die Anfangsgeschwindigkeiten der beiden Punkte B und C gleich Null, so ist stets zufolge der Flächenintegrale (4):

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0.$$

Sind die Anfangsgeschwindigkeiten nicht Null, so können doch zwischen ihnen und den Anfangscoordinaten solche Beziehungen bestehen, dass diese 3 Constanten verschwinden. In beiden Fällen erhält man aus den Gleichungen (7) und (8) des § 4:

$$(17) \ldots\ldots \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_1' \\ y_1 & y_2 & y_1' \\ z_1 & z_2 & z_1' \end{vmatrix} = 0 \text{ und } \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_2' \\ y_1 & y_2 & y_2' \\ z_1 & z_2 & z_2' \end{vmatrix} = 0$$

Nun bestehen aber ausserdem zwischen den 6 Coordinaten und ihren zweiten Ableitungen nach t die Gleichungen (5) und (6):

$$(18) \ldots\ldots \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_1'' \\ y_1 & y_2 & y_1'' \\ z_1 & z_2 & z_1'' \end{vmatrix} = 0 \text{ und } \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_2'' \\ y_1 & y_2 & y_2'' \\ z_1 & z_2 & z_2'' \end{vmatrix} = 0$$

Als Bedingung für das gemeinsame Bestehen der Gleichungen (17) und (18) ergeben sich daher die beiden Integrale:

$$(19.) \quad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = c_4 : c_5 : c_6$$

wo c_4 c_5 c_6 willkürliche Constanten bedeuten, oder:

$$(19a) \ldots \begin{cases} c_4 x_1 + c_5 y_1 + c_6 z_1 = 0 \\ c_4 x_2 + c_5 y_2 + c_6 z_2 = 0 \end{cases}$$

d. h. wenn

$$c_1 = 0,\ c_2 = 0,\ c_3 = 0$$

ist, so geht stets die Bewegung der starren Linie in einer durch das feste Centrum A gehenden Ebene:

$$(20) \ldots c_4 x + c_5 y + c_6 z = 0$$

vor sich.

§ 7. Die Bedingungen, unter welchen der allgemeine Fall des Raumes sich auf den der Ebene reducirt.

Soll sich die starre Linie in einer Ebene bewegen, so muss diese Ebene stets den anziehenden Punkt A enthalten. Denn angenommen dies wäre nicht der Fall und die Ebene der Bewegung hätte die Gleichung:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

so müssten also die beiden Gleichungen:

$$(21) \ldots \begin{cases} \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 + \delta = 0 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma z_2 + \delta = 0 \end{cases}$$

und die daraus resultirende:

$$(22) \ldots \alpha (x_1 - x_2) + \beta (y_1 - y_2) + \gamma (z_1 - z_2) = 0$$

Integrale des Systems der 6 Differentialgleichungen der Bewegung (1) sein. Multipliciren wir die drei ersten Gleichungen (1) mit resp. α, β, γ, so erhalten wir unter Berücksichtigung von (22):

$$m_1 \frac{d^2}{dt^2} (\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1) = - \frac{f m_1}{r_1^3} (\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1)$$

oder nach (21):

$$+ \frac{f m_1}{r_1^3} \cdot \delta = m_1 \frac{d_2}{dt_2} (- \delta) = 0$$

also auch $\delta = 0$, d. h. die Ebene der Bewegung geht durch A.

Weiss man also, dass die Bewegung der starren Linie BC in der Ebene ABC stattfindet, deren Gleichung

$$(20) \ldots c_4 x + c_5 y + c_6 z = 0$$

sein mag, und soll man die dazu nothwendigen Bedingungen aufstellen, so ergeben sich aus (20) sofort die Gleichungen (19a) und (19) und dann mit Rücksicht auf (19) aus den allgemein giltigen Gleichungen (18) durch Integration die beiden Gleichungen (17) oder nach (7) und (8):

$$\begin{aligned} c_1 x_1 + c_2 y_1 + c_3 z_1 &= 0 \\ c_1 x_2 + c_2 y_2 + c_3 z_2 &= 0 \end{aligned}$$

wo c_1 c_2 c_3 die drei Constanten der Flächenintegrale sind. Diese beiden Gleichungen können aber nur zusammen bestehen, wenn entweder:

$$c_1 : c_2 : c_3 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

oder:

$$c_1 = 0,\ c_2 = 0,\ c_3 = 0.$$

Die erste dieser beiden Bedingungen fällt mit der Gleichung (19) zusammen, welche ausdrückt, dass die beiden Punkte $x_1\ y_1\ z_1$ und $x_2\ y_2\ z_2$ stets in der gegebenen Ebene (20) liegen müssen; folglich sind die nothwendigen Bedingungen für die Bewegung in der Ebene:

$$c_1 = 0,\ c_2 = 0,\ c_3 = 0.$$

Dass diese Bedingungen auch hinreichend sind, ist bereits im § 6 gezeigt worden.

§ 8. Betrachtung der Bewegung des Schwerpunktes der starren Linie im Raume.

Der Schwerpunkt S des festen Systems BC bewegt sich bekanntlich so, als ob die Massen der beiden Endpunkte, m_1 und m_2, in ihm vereinigt, und die auf diese wirkenden Kräfte $-\frac{fm_1}{r_1^2}$ und $-\frac{fm_2}{r_2^2}$ parallel mit sich an ihn versetzt wären. Die Differentialgleichungen der Bewegung des Schwerpunktes, dessen Coordinaten $\xi\ \eta\ \zeta$ sein mögen, sind daher, wenn wir $m_1 + m_2 = M$ setzen:

$$(23.)\quad \begin{cases} M\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{dU}{dx_1} + \frac{dU}{dx_2} = -\frac{fm_1 x_1}{r_{13}} - \frac{fm_2 x_2}{r_2^3} \\ M\frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{dU}{dy_1} + \frac{dU}{dy_2} = -\frac{fm_1 y_1}{r_1^3} - \frac{fm_2 y_2}{r_2^3} \\ M\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{dU}{dz_1} + \frac{dU}{dz_2} = -\frac{fm_1 z_1}{r_1^3} - \frac{fm_2 z_2}{r_2^3} \end{cases}$$

Setzen wir dann:

$$(24)\ \ldots\quad \begin{cases} x_1 = \xi + \xi_1 & x_2 = \xi + \xi_2 \\ y_1 = \eta + \eta_1 & y_2 = \eta + \eta_2 \\ z_1 = \zeta + \zeta_1 & z_2 = \zeta + \zeta_2 \end{cases}$$

so dass $\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1$ und $\xi_2\ \eta_2\ \zeta_2$ die relativen Coordinaten von m_1 und m_2 in Bezug auf parallele Axen durch den Schwerpunkt bedeuten, und bezeichnen wir

$$SC = \frac{m_1}{M} \cdot l \text{ mit } l_1 \text{ und } SB = \frac{m_2}{M} \cdot l \text{ mit } l_2,$$

so dass:

$$(25)\ \ldots\ m_1 = \frac{l_1}{l} \cdot M \qquad m_2 = \frac{l_2}{l} \cdot M$$

so schreiben sich die Gleichungen (23) in der Form:

$$(26.)\quad \begin{cases} l \cdot \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = -f\left(\dfrac{l_1}{r_1^3}+\dfrac{l_2}{r_2^3}\right)\cdot\xi - f\left(\dfrac{l_1\,\xi_1}{r_1^3}+\dfrac{l_2\,\xi_2}{r_2^3}\right) \\ l \cdot \dfrac{d_2\eta}{dt^2} = -f\left(\dfrac{l_1}{r_1^3}+\dfrac{l_2}{r_2^3}\right)\cdot\eta - f\left(\dfrac{l_1\,\eta_1}{r_1^3}+\dfrac{l_2\,\eta_2}{r_2^3}\right) \\ l \cdot \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = -f\left(\dfrac{l_1}{r_1^3}+\dfrac{l_2}{r_2^3}\right)\cdot\zeta - f\left(\dfrac{l_1\,\zeta_1}{r_1^3}+\dfrac{l_2\,\zeta_2}{r_2^3}\right) \end{cases}$$

Nach der bekannten Relation zwischen der absoluten lebendigen Kraft eines bewegten Systems und seiner relativen lebendigen Kraft in Bezug auf den Schwerpunkt ist:

$$m_1\,[(x_1')^2+(y_1')^2+(z_1')^2]+m_2\,[(x_2')^2+(y_2')^2+(z_2')^2] = m_1\,[(\xi_1')^2+(\eta_1')^2+(\zeta_1')^2]+m_2\,[(\xi_2')^2+(\eta_2')^2+(\zeta_2')^2]+M\,[(\xi')^2+(\eta')^2+(\zeta')^2]$$

Aus dieser Gleichung und der der lebendigen Kraft (2) folgt mit Rücksicht auf (25):

$$(27.)\quad l_1\,[(\xi_1')^2+(\eta_1')^2+(\zeta_1')^2]+l_2\,[(\xi_2')^2+(\eta_2')^2+(\zeta_2')^2]+l\,[(\xi')^2+(\eta')^2+(\zeta')^2] = \frac{2l}{M}\,(U-h)$$

Die Flächenintegrale (4) nehmen in Folge der Substitutionen (24) und (25) die Gestalt an:

$$(28.)\quad \begin{cases} l\,(\eta\,\zeta'-\zeta\,\eta')+l_1\,(\eta_1\,\zeta_1'-\zeta_1\,\eta_1')+l_2\,(\eta_2\,\zeta_2'-\zeta_2\,\eta_2') = c_1\cdot\dfrac{l}{M}=C_1 \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Ferner ist:

$$m_1\,r_1^2+m_2\,r_2^2 = m_1\,l_2^2+m_2\,l_1^2+M\cdot\rho^2$$

indem wir SA mit ρ bezeichnen; mithin erhält man aus (13):

$$(29)\quad \ldots\quad M\,\frac{d^2(\rho^2)}{dt^2} = 2\,(U-2h)+4\,\lambda\,l^2$$

Die Gleichungen (26), (27) und (28) würden sich noch etwas zusammenziehen, wenn wir die Winkel α, β, γ einführten, welche die starre Linie mit den Coordinatenaxen bildet, und setzten:

$$\xi_1 = l_2\cos\alpha \qquad \xi_2 = -l_1\cos\alpha$$
$$\eta_1 = l_2\cos\beta \qquad \eta_2 = -l_1\cos\beta$$
$$\zeta_1 = l_2\cos\gamma \qquad \zeta_2 = -l_1\cos\gamma$$

Wir könnten dann weiter die bei Einführung des Schwerpunktes natürlichen Coordinaten des Problems, nämlich den Radius vector AS $= \rho$ und den Winkel ψ, welchen derselbe mit der starren Linie BC bildet, als Variable wählen und Alles durch diese ausdrücken; doch da die entstehenden Gleichungen zwischen $\rho\,\psi$ und der Zeit t ziemlich complicirt sind und umständliche Rechnungen erfordern, ohne dass die Lösung des Problems da-

durch gefördert wird, so werden wir diese Umformungen nur für den einfacheren Fall der Bewegung in der Ebene durchführen und verweisen daher auf den § 13 im zweiten Abschnitte dieser Abhandlung.

Zweiter Abschnitt.

Die Bewegung in der Ebene.

§ 9. Zusammenstellung der Gleichungen für die Bewegung in der Ebene in rechtwinkligen Coordinaten.

Nehmen wir an, die starre Linie sei genöthigt, in der durch ihre Anfangslage und das feste Centrum bestimmten Ebene zu bleiben.[1]) Wir wählen die Ebene zur Coordinatenebene XY und den festen Punkt zum Anfangspunkte. Führen wir dann die entsprechende Bezeichnung ein wie im ersten Abschnitte, so übertragen sich die Gleichungen desselben unmittelbar auf den Fall der Ebene.

Die Bedingungsgleichung $F = 0$ ist:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l^2 = 0$$

Die Differentialgleichungen der Bewegung sind:

$$(1.)\quad \begin{cases} m_1 \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = \dfrac{dU}{dx_1} + \lambda \dfrac{dF}{dx_1} = -\dfrac{f m_1 x_1}{r_1^3} + 2\lambda (x_1 - x_2) \\ m_1 \dfrac{d^2 y_1}{dt^2} = \dfrac{dU}{dy_1} + \lambda \dfrac{dF}{dy_1} = -\dfrac{f m_1 y_1}{r_1^3} + 2\lambda (y_1 - y_2) \\ m_2 \dfrac{d^2 x_2}{dt^2} = \dfrac{dU}{dx_2} + \lambda \dfrac{dF}{dx_2} = -\dfrac{f m_2 x_2}{r_2^3} - 2\lambda (x_1 - x_2) \\ m_2 \dfrac{d^2 y_2}{dt^2} = \dfrac{dU}{dy_2} + \lambda \dfrac{dF}{dy_2} = -\dfrac{f m_2 y_2}{r_2^3} - 2\lambda (y_1 - y_2) \end{cases}$$

worin $U = \dfrac{f m_1}{r_1} + \dfrac{f m_2}{r_2}$ und nach § 5:

$$\lambda = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{1}{2l^2} \times$$

$$\left\{ \frac{f}{2} \left[(r_1^2 - r_2^2) \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) + l^2 \left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{1}{r_2^3} \right) \right] - [(x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2] \right\}$$

[1]) Dass die Ebene der Bewegung stets durch den festen Punkt gehen muss, ist bereits im § 7 bewiesen worden.

Das Princip der lebendigen Kraft giebt:

$$(2) \ldots m_1 [(x_1')^2 + (y_1')^2] + m_2 [(x_2')^2 + (y_2')^2] = 2 (U - h)$$

und das der Flächen:

$$(3) \ldots m_1 (x_1 y_1' - y_1 x_1') + m_2 (x_2 y_2' - y_2 x_2') = c$$

wo h uud c willkürliche Constanten und die Ableitungen nach t durch Striche angedeutet sind.

Ferner erhält man noch:

$$(4) \ldots \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} x_1 - x_2, & (x_1 - x_2)' \\ y_1 - y_2, & (y_1 - y_2)' \end{vmatrix} = - f \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) (x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

$$(5) \ldots \frac{d^2}{dt^2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) = 2 (U - 2h) + 4 \lambda l^2$$

Nennen wir den Winkel, welchen die starre Linie l mit der X-Axe bildet, φ, so dass:

$$x_1 - x_2 = l \,.\, cos\, \varphi$$
$$y_1 - y_2 = l \,.\, sin\, \varphi$$

ist, und setzen wir den Inhalt des Dreiecks ABC gleich D, so dass:

$$x_1 y_2 - y_1 x_2 = 2D$$

so geht die Gleichung (4) über in:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = - \frac{2D}{l^2} f \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) \qquad \text{oder:}$$

$$(6) \ldots \frac{d^2\varphi}{dt^2} = - \frac{s}{l} f \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right)$$

indem wir die senkrechte Entfernung des festen Centrums von der starren Linie l mit s bezeichnen.

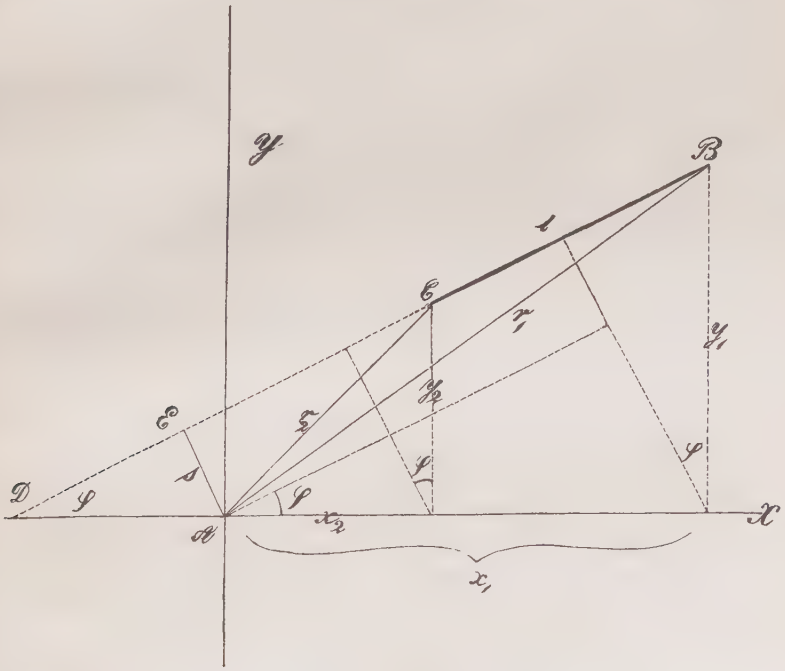
§ 10. Transformation der rechtwinkligen Coordinaten in andere, welche die Bedingungsgleichung F = 0 identisch erfüllen.

Betrachtungen, die denen des § 5 ganz analog sind, zeigen, dass die vollständige Integration der Differentialgleichungen der Bewegung in der Ebene (1) auf 6 Integrale mit eben so vielen willkürlichen Constanten führen muss, durch welche drei der vier Coordinaten x_1 y_1 x_2 y_2 — denn nur so viel sind in Folge der Bedingungsgleichung F = 0 von einander unabhängig — und die ersten Ableitungen derselben nach t als Funktionen von t gefunden werden können. Von diesen 6 Integralen liefert das Princip der lebendigen Kraft und das der Flächenräume zwei (2) und (3), und zwar in endlicher Form, während noch vier unbekannt bleiben, die sich unter bestimmten Voraussetzungen über das Verhältniss der Werthe der Constanten wohl nur in der Form unendlicher Reihen werden aufstellen lassen.

Bekanntlich ist es, sobald Bedingungsgleichungen existiren, für die meisten Probleme von grosser Wichtigkeit, an Stelle der Coordinaten neue Veränderliche einzuführen, die so beschaffen sind, dass, wenn Alles durch sie ausgedrückt ist, die Bedingungsgleichungen von selbst erfüllt sind; und zwar muss die Anzahl dieser Veränderlichen gleich der Anzahl der Coordinaten vermindert um die der Bedingungsgleichungen sein, damit diese neuen Variabeln von einander unabhängig sind. Wir wollen eine solche Transformation auch hier durchführen.

Als die natürlichen Veränderlichen unserer Aufgabe ergeben sich unmittelbar die beiden Radii vectores r_1 und r_2. Als die noch fehlende dritte unabhängige Variable wählen wir den Winkel φ, welchen BC mit der Richtung der positiven X-Axe bildet,

Fig. 1.



so ist:

$$x_1 - x_2 = l \,.\, cos\,\varphi$$
$$y_1 - y_2 = l \,.\, sin\,\varphi$$

Durch Einführung dieses Winkels φ wird die Bedingungsgleichung

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l^2 = 0$$

identisch erfüllt. Wir erhalten daher für die Transformation der Coordinaten die Gleichungen:

$$\text{(a)} \ldots\ x_1^2 + y_1^2 = r_1^2$$
$$\text{(b)} \ldots\ x_2^2 + y_2^2 = r_2^2$$
$$\text{(c)} \ldots\ x_1 - x_2 = l \,.\, \cos\varphi$$
$$\text{(d)} \ldots\ y_1 - y_2 = l \,.\, \sin\varphi$$

Daraus folgt:

$$(x_1 - l\cos\varphi)^2 + (y_1 - l\sin\varphi)^2 = r_2^2 \qquad \text{mithin}$$
$$\text{(e)} \ldots\ x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi = p$$

indem wir abkürzend

$$\frac{r_1^2 - r_2^2 + l^2}{2l} = p$$

setzen.

Aus der Figur 1 erkennt man leicht, dass $p = BE$, d. i. die Projection von r_1 auf die Richtung l, ist.

Quadriren wir dann (e) und subtrahiren sie von (a), so folgt:

$$(x_1\sin\varphi - y_1\cos\varphi)^2 = r_1^2 - p^2$$

d. i. nach der Figur $= AE^2 = s^2$; folglich:

$$\text{(f)} \ldots\ x_1\sin\varphi - y_1\cos\varphi = -s$$

wo auf der rechten Seite das negative Vorzeichen zu nehmen ist, wie die Figur lehrt.

Aus (e) und (f) ergiebt sich:

$$\text{(g)} \ldots \begin{cases} x_1 = p\cos\varphi - s\,.\,\sin\varphi \\ y_1 = p\sin\varphi + s\,.\,\cos\varphi \end{cases}$$

In derselben Weise finden wir:

$$\text{(h)} \ldots \begin{cases} x_2\cos\varphi + y_2\sin\varphi = q \\ x_2\sin\varphi - y_2\cos\varphi = -s \end{cases}$$

worin q die Strecke CE, d. i. die Projektion von r_2 auf die Richtung von l, gleich $\frac{r_1^2 - r_2^2 - l^2}{2l}$ ist; und daraus:

$$\text{(i)} \ldots \begin{cases} x_2 = q\,.\,\cos\varphi - s\,.\,\sin\varphi \\ y_2 = q\,.\,\sin\varphi + s\,.\,\cos\varphi \end{cases}$$

Man überzeugt sich leicht mit Rücksicht auf die Gleichung:

$$p - q = l$$

dass diese Werthe von $x_1\ y_1\ x_2\ y_2$ die Bedingungsgleichung $F = 0$ von selbst befriedigen.

Wir führen dann die neuen Veränderlichen $r_1\ r_2$ und φ in die Gleichungen für das Princip der Flächen und der lebendigen Kraft ein. Es ist:

$$x_1 y_1' - y_1 x_1' = p^2 \cdot \varphi' + p \cdot s' - s \cdot p' + s^2 \cdot \varphi'$$

oder, da $p^2 + s^2 = r_1^2$ ist:

$$x_1 y_1' - y_1 x_1' = r_1^2 \cdot \varphi' + p \cdot s' - s \cdot p'$$

Ebenso ergiebt sich:

$$x_2 y_2' - y_2 x_2' = r_2^2 \cdot \varphi' + q \cdot s' - s \cdot q'$$

Das Princip der Flächen (3) liefert daher die Gleichung:

(7) . . . $(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) \cdot \varphi' + (m_1 p + m_2 q) \cdot s' - (m_1 + m_2) s \cdot u = c$

indem wir p' und q', die beide

$$= \frac{r_1 r_1' - r_2 r_2'}{l}$$

sind, abkürzend durch u bezeichnen,

Ferner finden wir:

$$x_1'^2 + y_1'^2 = u^2 + r_1^2 \varphi'^2 + s'^2 - 2s \cdot u \cdot \varphi' + 2p s' \cdot \varphi'$$
$$x_2'^2 + y_2'^2 = u^2 + r_2^2 \varphi'^2 + s'^2 - 2s \cdot u \cdot \varphi' + 2q s' \cdot \varphi'$$

Das Princip der lebendigen Kraft (2) führt daher zu der Gleichung:

(8) . . . $(m_1 + m_2)(u_2 + s'^2 - 2s \cdot u \cdot \varphi') + (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) \varphi'^2 + 2 (m_1 p + m_2 q) s' \varphi' = 2 (U - h)$

Wenn wir die Gleichung (7) mit φ', resp. $2\varphi'$ multipliciren und von (8) subtrahiren, so erhalten wir zwei neue Gleichungen von etwas einfacherer Form als (8), und wir können daher die eine oder die andere dieser beiden an Stelle von (8) anwenden. Diese zwei neuen Gleichungen sind:

(9) . . . $(m_1 + m_2)(u^2 + s'^2 - s \cdot u\varphi') + (m_1 p + m_2 q) s' \cdot \varphi' = 2 (U - h) - c \cdot \varphi'$

(10) . . . $(m_1 + m_2)(u^2 + s'^2) - (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) \cdot \varphi'^2 = 2 (U - h - c \cdot \varphi')$

Die Gleichung (9) verdient vielleicht insofern den Vorzug vor (10), als in jene nur die erste Potenz von φ' eingeht.

Wir haben also aus dem Flächensatze und dem Princip der lebendigen Kraft zwei ziemlich einfache Integrale, (7) und (9) oder (7) und (10), erhalten, ausgedrückt durch die natürlichen Coordinaten des Problems r_1 r_2 und φ. Ausserdem haben wir schon zwischen denselben Coordinaten im § 9 die interessante Differentialgleichung (6) gefunden:

$$(6) \ldots . \quad \varphi'' = -\frac{s}{l} f\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right)$$

Von diesen drei Gleichungen (6), (7) und (9) resp. (10) hätte man auszugehen, um r_1 r_2 und φ als Funktionen von t zu bestimmen; doch ist der Verfasser in dieser Richtung nicht weiter zu bemerkenswerthen Resultaten gelangt.

§ 11. Untersuchung der Fälle, in denen der Winkel φ einen constanten Werth α hat.

Setzen wir voraus, dass φ, der Winkel, den die starre Linie BC mit der Richtung der positiven X-Axe bildet, constant $= \alpha$ ist, so folgt aus der Gleichung (6) dafür die Bedingung:

$$(11) \ldots . \quad 0 = -\frac{s}{l} f\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right)$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn entweder

$$r_1 = r_2$$

oder wenn $s = 0$ ist.

Für $\varphi = \alpha$ reducirt sich der Flächensatz (7) auf:

$$(12) \ldots (m_1 p + m_2 q) s' - (m_1 + m_2) s . u = c$$

und der Satz der lebendigen Kraft auf:

$$(13) \ldots (m_1 + m_2)(u^2 + s'^2) = 2\left[f\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right) - h\right]$$

Erster Fall: $r_1 = r_2$.

Dann wird:

$$p = \frac{l}{2}, \quad q = -\frac{l}{2}$$

$$u = p' = q' = 0$$

$$s = \sqrt{r_1^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{r_2^2 - \frac{l^2}{4}}$$

$$s' = \frac{r_1 r_1'}{\sqrt{r_1^2 - \frac{l^2}{4}}} = \frac{r_2 r_2'}{\sqrt{r_2^2 - \frac{l^2}{4}}}$$

Mithin gehen die Gleichungen (12) und (13) über in:

$$(12a) \ldots (m_1 - m_2) \frac{l}{2} \cdot \frac{r_1 r_1'}{\sqrt{r_1^2 - \frac{l^2}{4}}} = c$$

und:

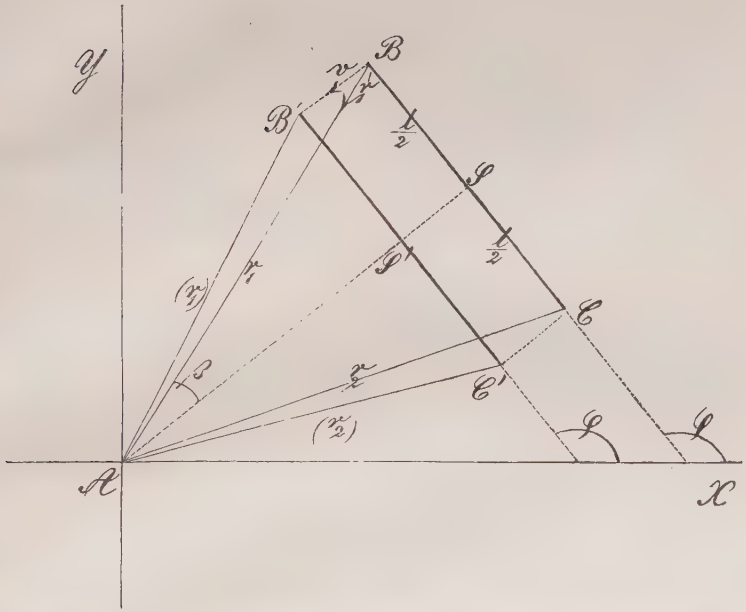
$$(13a) \ldots (m_1 + m_2) \cdot \frac{r_1^2 \cdot r_1'^2}{r_1^2 - \frac{l^2}{4}} = 2f \frac{m_1 + m_2}{r_1} - 2h$$

Ist zugleich noch $m_1 = m_2$, so ergiebt sich aus (12a):

$$(14) \ldots . \quad c = 0$$

d. h. die von den beiden Radien r_1 und r_2 beschriebenen Flächenräume sind, ihrem absoluten Werthe nach, gleich, oder, wie auch schon ohne Weiteres leicht ersichtlich (Fig. 2), die Bewegung der

Fig. 2.



starren Linie BC, an deren Endpunkten sich zwei gleiche Massen befinden, geschieht unter dem alleinigen Einfluss der von A ausgehenden Attraction parallel ihrer Anfangslage gegen das feste Centrum hin, falls in der Anfangslage das feste Centrum senkrecht über der Mitte der starren Linie lag. (Natürlich würde die Bewegung auch noch dieselbe sein, wenn man der starren Linie eine nach AS gerichtete Anfangsgeschwindigkeit ertheilt hätte.)

Die Geschwindigkeit v, mit welcher sich die starre Linie parallel fortbewegt, ist, wie man leicht aus Fig. 2 erkennt:

$$v = r_1' \cdot \frac{\sqrt{r_1^2 - \frac{l^2}{4}}}{r_1}$$

d. i. nach (13a):

$$(15) \quad \ldots \quad v = \sqrt{\frac{2f}{r_1} - \frac{h}{m_1}} \cdot \frac{\sqrt{r_1^2 - \frac{l^2}{4}}}{r_1}$$

oder auch:

$$(15a) \ldots v = \sqrt{\frac{4f \cdot \sin\beta}{l} - \frac{h}{m_1}} \cdot \cos^2 \beta$$

wenn wir den halben Winkel BAC mit β bezeichnen.

Setzen wir AS = x, also $r_1^2 = x^2 + \frac{l^2}{4}$ so erhalten wir aus (15): $v = \frac{dx}{dt}$ = einem Bruche, der im Nenner eine Wurzel aus einem den vierten Grad übersteigenden Ausdruck hat und darum wird die weitere Rechnung nicht durchführbar.

Zweiter Fall: s = 0

Ist s = 0, so liegen die drei Punkte A, B, C in einer geraden Linie nnd müssen auch darin bleiben, falls auf B und C nur die anziehende Kraft von A wirkt, oder wenigstens die der starren Linie ertheilte Anfangsgeschwindigkeit eine durch A gehende Richtung hat. Unter jeder dieser beiden Voraussetzungen reducirt sich der allgemeine Fall der Bewegung in der Ebene auf den besonderen der Bewegung in der eigenen Richtung.

Befindet sich A zwischen B und C, so ist:

$$r_1 + r_2 = l,$$

folglich:

$$r_1' = -r_2'; \ u = \frac{r_1 r_1' - r_2 r_2'}{l} = r_1' = -r_2'$$

Liegt ferner A ausserhalb BC, so ist:

$$r_1 - r_2 = \pm l$$

je nachdem $r_1 \gtrless r_2$, d. h. B oder C der von A ferner liegende Punkt ist. Daraus folgt:

$$r_1' = +r_2'; \ u = +r_1' = \pm r_2'$$

Von dem Flächensatze kann natürlich bei dieser Fortbewegung in gerader Linie nicht die Rede sein. Der Satz der lebendigen Kraft (13) nimmt jetzt die Gestalt an:

$$M \cdot u^2 = 2\left[f\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right) - h\right]$$

worin wieder $m_1 + m_2 = M$ gesetzt ist, oder, sowohl wenn A innerhalb als ausserhalb BC liegt:

$$(16) \ldots Mr_1'^2 = Mr_2'^2 = 2\left[f\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right) - h\right]$$

Die weitere ausführliche Untersuchung dieses Specialfalles wird den Gegenstand des dritten Abschnitts dieser Abhandlung bilden.

§ 12. Die Bedingungen, unter welchen die starre Linie sich in ihrer eigenen Richtung fortbewegt.

Wenn die starre Linie sich in der eigenen Richtung bewegen, d. h. wenn der Winkel φ, den sie mit der positiven X-Axe bildet, einen constanten Werth α haben soll, so muss der feste Punkt A stets in dieser Richtung liegen. Denn angenommen die Richtung BC ginge nicht durch A, so hätte s, d. i. die senkrechte Entfernung des Punktes A von BC einen von Null verschiedenen Werth, und die bei constantem φ nothwendige Bedingungsgleichung:

$$-\frac{s}{l} f\left(\frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{r_2^3}\right)=0$$

könnte nur befriedigt werden, wenn $r_1 = r_2$ wäre. In diesem Falle bewegt sich aber, wie im § 11 gezeigt worden ist, die starre Linie nie in ihrer eigenen Richtung fort; folglich ist die nothwendige Bedingung dafür:

$$s = 0$$

d. h. das feste Centrum muss entweder auf der starren Linie oder in ihrer Verlängerung liegen. Die Anfangsgeschwindigkeit der starren Linie muss dann entweder Null oder mit ihr von gleicher Richtung sein.

§ 13. Betrachtung der Bewegung des Schwerpunktes der starren Linie in der Ebene.

Behalten wir genau die Bezeichungen des § 8 bei, so werden die dort aufgestellten Gleichungen im Falle der Ebene:

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2}=-\frac{fm_1 x_1}{r_1^3}-\frac{fm_2 x_2}{r_2^3}$$

$$M\frac{d^2\eta}{dt^2}=-\frac{fm_1 y_1}{r_1^3}-\frac{fm_2 y_2}{r_2^3}$$

oder, wenn wir:

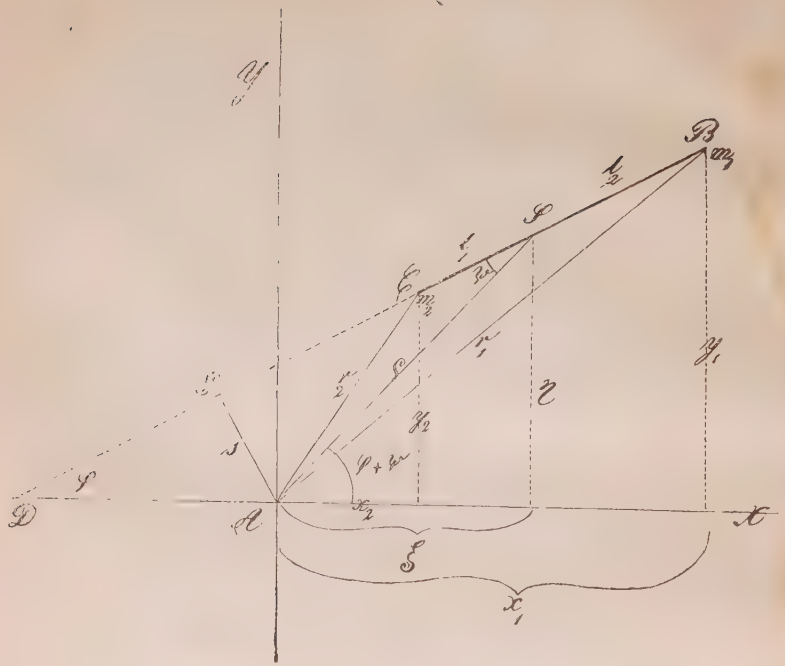
$$x_1=\xi+l_2\cos\varphi \qquad x_2=\xi-l_1\cos\varphi$$
$$y_1=\eta+l_2\sin\varphi \qquad y_2=\eta-l_1\sin\varphi$$

setzen, worin φ wieder den Winkel bedeutet, welchen die Linie BC mit der positiven X-Axe bildet, und die Ausdrücke:

$$m_1=\frac{l_1}{l}M \qquad m_2=\frac{l_2}{l}M$$

berücksichtigen:

Fig. 3.



$$(17.)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = -\dfrac{f}{l}\left[\left(\dfrac{l_1}{r_1^3}+\dfrac{l_2}{r_2^3}\right)\cdot\xi + l_1\, l_2\, cos\varphi\left(\dfrac{1}{r_1^3}-\dfrac{1}{r_2^3}\right)\right. \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} = -\dfrac{f}{l}\left[\left(\dfrac{l_1}{r_1^3}+\dfrac{l_2}{r_2^3}\right)\cdot\eta + l_1\, l_2\, sin\varphi\left(\dfrac{1}{r_1^3}-\dfrac{1}{r_2^3}\right)\right. \end{cases}$$

Der Satz der lebendigen Kraft giebt nach (27) im § 8 unter Beachtung der Gleichung:

$$l_1 + l_2 = l$$

$$(18)\ \ldots\quad \xi'^2 + \eta'^2 + l_1\, l_2\, \varphi'^2 = \frac{2\,(U-h)}{M}$$

Der Flächensatz liefert nach (28) im § 8:

$$(19)\ \ldots\quad \xi\,\eta' - \eta\,\xi' + l_1\, l_2\, \varphi' = \frac{c}{M} = C$$

In diesen Gleichungen kommen die 5 Veränderlichen ξ η φ r_1 r_2 vor neben der Zeit t. Wir werden an Stelle jener 5 zwei

neue Unbekannte einführen, nämlich den Radius vector des Schwerpunktes $SA = \rho$ und den Winkel $ASC = \psi$, welchen die Linie BC mit SA bildet (Fig. 3), und werden die Bahn des Schwerpunktes durch zwei Gleichungen zwischen ρ ψ und t bestimmen.

Zur Elimination von r_1 und r_2 hat man unmittelbar die beiden Gleichungen:

$$(20) \ldots \begin{cases} r_1^2 = \rho^2 + l_2^2 + 2\rho\, l_2 \cos\psi \\ r_2^2 = \rho^2 + l_1^2 - 2\rho\, l_1 \cos\psi \end{cases}$$

Ausserdem ergiebt sich aus der Figur:

$$\xi = \rho \cos(\psi + \varphi)$$
$$\eta = \rho \sin(\psi + \varphi)$$

mithin:

$$\xi'^2 + \eta'^2 = \rho'^2 + \rho^2 (\psi' + \varphi')^2$$
$$\xi\, \eta' - \eta\, \xi' = \rho^2 (\psi' + \varphi')$$

Die Gleichungen (18) und (19) schreiben sich daher in der Form:

$$(18a) \ldots \rho'^2 + \rho^2 (\psi' + \varphi')^2 + n^2 \varphi'^2 = \frac{2(U - h)}{M}$$

$$(19a) \ldots \ldots \ldots \rho^2 (\psi' + \varphi') + n^2 \varphi' = C$$

indem wir noch $l_1 \cdot l_2 = n^2$ gesetzt haben.

Ausser diesen beiden Gleichungen haben wir noch die Gleichung (6);

$$(21) \ldots \varphi'' = -\frac{f}{l}\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right) \cdot \rho \sin\psi$$

da $s = \rho \sin\psi$ ist. Hierin sowohl, wie auch in U denken wir uns natürlich an Stelle von r_1 und r_2, die wir der kürzeren Schreibweise wegen beibehalten, ihre Werthe in ρ und ψ aus (20) eingesetzt.

Wir haben nun noch φ zu eliminiren. Nach (19a) ist:

$$\varphi' = \frac{C - \rho^2 \psi'}{\rho^2 + n^2}$$

folglich:

$$\psi' + \varphi' = \frac{C + n^2 \psi'}{\rho^2 + n^2}$$

Aus (18a) ergiebt sich daher:

$$\rho'^2 + \rho^2 \left(\frac{C + n^2 \psi'}{\rho^2 + n^2}\right)^2 + n^2 \left(\frac{C - \rho^2 \psi'}{\rho^2 + n^2}\right)^2 = \frac{2(U - h)}{M}$$

oder nach leichter Umformung:

$$(22) \ldots \rho'^2 + \frac{n^2 \rho^2 \psi'^2 + C^2}{\rho^2 + n^2} = \frac{2(U - h)}{M}$$

Die Gleichung (21) geht über in:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{C - \rho^2 \psi'}{\rho^2 + n^2}\right) = -\frac{f}{l}\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right) \cdot \rho \sin\psi$$

oder, wenn man die Differentiation ausführt und den dann gemeinschaftlichen Factor ρ auf beiden Seiten hebt:

$$(23) \quad \frac{\rho \cdot \psi''}{\rho^2 + n^2} + \frac{2\rho'}{\rho^2 + n^2} \cdot \frac{C + n^2 \psi'}{\rho^2 + n^2} = \frac{f}{l} \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) \sin \psi$$

Die Curve, welche der Schwerpunkt beschreibt, ist demnach durch die zwei Differentialgleichungen (22) und (23) zwischen ρ ψ und t gegeben.

Wir könnten die Zeit t noch daraus eliminiren, indem wir den Werth von dt aus (22) in (23) einsetzten, und würden dann eine Gleichung zwischen den beiden unabhängigen Variabeln ρ und ψ zur Bestimmung der ebenen Bahncurve des Schwerpunktes erhalten; doch ist diese Gleichung wegen ihrer Complication von keinem Interesse.

Dritter Abschnitt.

Die Bewegung der starren Linie in der eigenen Richtung.

§ 14. Der anziehende Punkt liege innerhalb der beiden beweglichen Punkte so, dass das System sich im Gleichgewicht befindet.

Wir gehen jetzt zu der specielleren Untersuchung des besonderen Falles über, auf den wir bereits in § 11 geführt wurden, nämlich dass die drei Punkte A, B, C anfänglich in gerader Linie liegen. Wir setzen voraus, dass die Anfangsgeschwindigkeit der starren Linie Null sei, so kann die Bewegung derselben nur in ihrer anfänglichen Richtung erfolgen. Wir betrachten zunächst den Fall, dass das feste Centrum A zwischen B und C liegt.

Auf der starren Linie BC giebt es einen Punkt G von der Lage, dass

$$m_1 : GB^2 = m_2 : GC^2$$

ist. Sobald A mit diesem Punkte G zusammenfällt, ist die Anziehung die auf B und C ausgeübt wird, gleich, es findet dann keine Bewegung statt, die starre Linie befindet sich im Gleichgewicht. Bezeichnen wir die Strecken AB und AC resp. mit r_1 und r_2, so ist $r_1 + r_2 = l$ und die Bedingung des Gleichgewichts:

$$\frac{m_1}{r_1^2} = \frac{m_2}{r_2^2}$$

Bekanntlich ist im Allgemeinen für jede Gleichgewichtslage die Kräftefunktion U ein Maximum oder Minimum, und je nach dem ist das Gleichgewicht stabil oder labil. In unserm Falle finden wir, wenn wir die Ableitungen nach t durch Striche andeuten:

$$U'' = + 2f\left(\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3}\right) r_1'^2$$

Da U'' sich positiv ergiebt, so ist für diese Gleichgewichtslage die Kräftefunktion ein Minimum, das Gleichgewicht ist daher labil, oder wenn man einmal das feste System BC aus der Gleichgewichtslage durch eine noch so kleine Erschütterung entfernt, so kehrt es nicht wieder in dieselbe zurück.

Die Werthe von r_1 und r_2 für die labile Gleichgewichtslage sind:

$$r_1 = \frac{\sqrt{m_1}}{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}} \cdot l$$

$$r_2 = \frac{\sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}} \cdot l$$

Der Schwerpunkt S der starren Linie, welcher dieselbe in zwei Theile:

$$l_1 = \frac{m_1}{M} \cdot l \quad \text{und} \quad l_2 = \frac{m_2}{M} \cdot l$$

zerlegt, muss stets auf derjenigen Seite des Gleichgewichtspunktes G liegen, auf welcher sich auch die grössere Masse befindet. Denn da G und S die Linie BC so theilen, dass

$$m_1 : m_2 = r_1^2 : r_2^2 \quad \text{und}$$
$$m_1 : m_2 = l_1 : l_2$$

so folgt, dass, wenn $m_1 \gtrless m_2$, auch $r_1 \gtrless r_2$ und gleichzeitig $l_1 \gtrless l_2$ ist. Zugleich ist klar, dass der Mittelpunkt von BC stets zwischen G und S und zwar näher an G als an S liegen muss.

Bezeichnen wir GS mit ρ, so ist, je nach dem $m_1 \gtrless m_2$,

$$\rho = \pm (r_1 - l_2) = \pm (r_2 - l_1)$$

oder, wenn wir für r_1 und l_2, oder für r_2 und l_1 ihre Werthe einsetzen:

$$\rho = \pm \frac{m_1^{\frac{3}{2}} - m_2^{\frac{3}{2}}}{(m_1 + m_2)(m_1^{\frac{1}{2}} + m_2^{\frac{1}{2}})} \cdot l = \pm \frac{l_1^{\frac{3}{2}} - l_2^{\frac{3}{2}}}{l_1^{\frac{1}{2}} + l_2^{\frac{1}{2}}}$$

§ 15. Der anziehende Punkt liege so zwischen den zwei beweglichen Punkten, dass Bewegung stattfinden muss.

Liegt das feste Centrum zu Anfang nicht in dem Gleichgewichtspunkte G, so tritt nothwendig eine Bewegung ein, die entweder in der Richtung von B nach C oder von C nach B stattfindet, je nachdem A zwischen G und B oder zwischen G und C liegt.

Denn befindet sich erstens A zwischen G und B, so liegt die Masse m_1 dem festen Centrum A näher als in der Gleichgewichtslage, und es ist daher:

$$\frac{m_1}{r_1^2} > \frac{m_2}{r_2^2}$$

Die Bewegung erfolgt also in der Richtung von B nach C, die wir als die positive annehmen wollen, indem wir A als Anfangspunkt betrachten; sie währt sicher so lange, bis B mit A zusammenfällt. Bezeichnen wir die variable Entfernung des Schwerpunktes S von A mit x, die anfängliche Entfernung mit x_0, so wird bei dieser Bewegung x von x_0 an beständig wachsen und seinen grössten Werth $BS = +\, l_2$ erreichen, sobald B in A angekommen ist. Ist $m_1 > m_2$, so hat x_0 die Werthe $-\rho$ und $+\, l_2$ zu Grenzen, folglich ist dann stets:

$$+\, l_2 > x > -\rho \quad \text{(Fig 4.)}$$

Fig. 4.

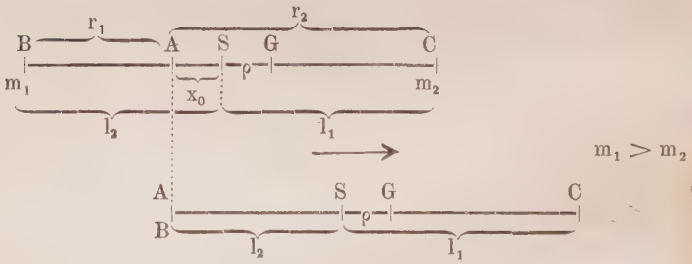
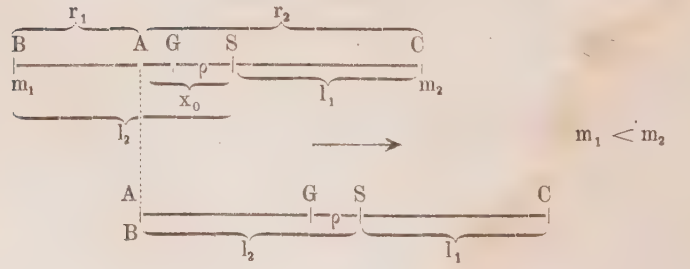


Fig. 5.



Ist $m_1 < m_2$, so liegen die Werthe von x_0 zwischen $+\rho$ und $+l_2$, mithin ist auch dann immer:

$$+l_2 > x > +\rho \qquad \text{(Fig. 5.)}$$

Liegt zweitens A zwischen G und C, so ist m_2 näher an A als in der Gleichgewichtslage; folglich ist dann

$$\frac{m_2}{r_2^2} > \frac{m_1}{r_1^2}$$

und die Bewegung wird in der Richtung von C nach B, die also die negative ist, stattfinden und bestimmt so lange andauern, bis C in A zu liegen kommt. Bei dieser Bewegung wird x von x_0 an beständig positiv abnehmen und seinen kleinsten Werth $CS = -l_1$ erreichen, wenn C in A ankommt. Ist nun $m_1 > m_2$, so kann x_0 nur Werthe haben, die zwischen $-\rho$ und $-l_1$ liegen, folglich ist dann stets:

$$-\rho > x > -l_1 \qquad \text{(Fig. 6.)}$$

Und ist $m_1 < m_2$, so liegt x_0 zwischen den Grenzen $+\rho$ und $-l_1$, mithin haben wir dann:

$$+\rho > x > -l_1 \qquad \text{(Fig. 7.)}$$

Fig. 6.

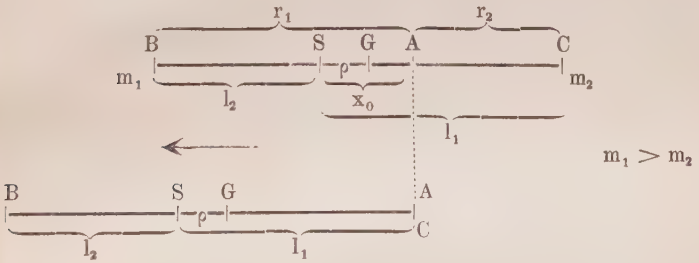
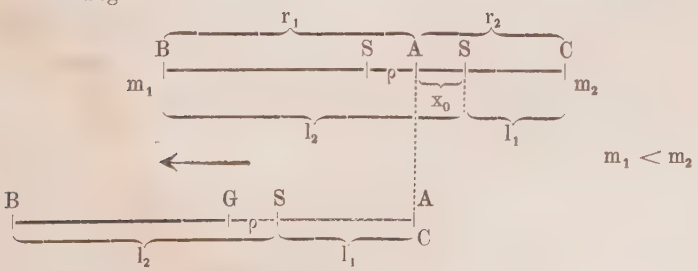


Fig. 7.



Liegt A zwischen G und B, so kann sich zwischen $x = x_0$ und $x = +l_2$ kein Werth mehr befinden, für den die Geschwindigkeit der starren Linie gleich Null wird; dasselbe gilt, wenn A zwischen G und C liegt, für das Intervall von $x = x_0$ bis $x = -l_1$.

§ 16. Der anziehende Punkt liege so zwischen den Endpunkten der starren Linie, dass die Bewegung in positiver Richtung geschieht.

Wir haben bereits im § 11 unter (16) als Ausdruck des Princips der lebendigen Kraft für diesen ganzen Specialfall die Gleichung erhalten:

$$M \cdot r_1'^2 = M \cdot r_2'^2 = 2\left[f\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right) - h\right]$$

welche wir auch leicht direct aus den Differentialgleichungen der Bewegung für diesen Fall würden herleiten können. Wir setzen an Stelle von r_1 und r_2 ihre Werthe:

$$r_1 = l_2 - x$$
$$r_2 = l_1 + x$$

wie sich dieselben aus den vier Figuren 4 bis 7 ergeben [1]), so drückt sich gleichzeitig die Geschwindigkeit der starren Linie, $\frac{dr_2}{dt} = -\frac{dr_1}{dt}$ (s. § 11), durch die ihr natürlich gleiche ihres Schwerpunktes, $\frac{dx}{dt}$, aus, und wir erhalten:

$$M\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2\left[f\left(\frac{m_1}{l_2 - x} + \frac{m_2}{l_1 + x}\right) - h\right]$$

oder, indem wir die Werthe

$$m_1 = \frac{l_1}{l} M \qquad m_2 = \frac{l_2}{l} M$$

einführen:

$$(1) \ldots \frac{1}{2} M\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{fM}{l}\left(\frac{l_1}{l_2 - x} + \frac{l_2}{l_1 + x}\right) - h$$

Wir haben bereits vorausgeschickt, dass wir die Anfangsgeschwindigkeit gleich Null annehmen wollen, folglich ist:

$$(2) \ldots 0 = \frac{fM}{l}\left(\frac{l_1}{l_2 - x_0} + \frac{l_2}{l_1 + x_0}\right) - h$$

---

[1]) Man erkennt leicht, dass die Substitution auch richtig bleibt, wenn S auf der negativen Seite von A, d. h. zwischen A und B, liegt, indem dann der absolute Werth der Strecke AS gleich — x zu nehmen ist.

Daraus folgt der Werth für die Constante h:

$$(3) \ldots h = \frac{fM}{l} \cdot \frac{l_1^2 + l_2^2 + (l_1 - l_2)\, x_0}{(l_1 + x_0)(l_2 - x_0)}$$

Durch Subtraction von (1) und (2) ergiebt sich:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{f}{l}\left(\frac{l_1}{l_2 - x} - \frac{l_1}{l_2 - x_0} + \frac{l_2}{l_1 + x} - \frac{l_2}{l_1 + x_0}\right)$$

oder nach einigen Umformungen:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2f\,[l_1^2 + l_2^2 + (l_1 - l_2)\, x_0]}{l\,(l_1 + x_0)(l_2 - x_0)} \times \frac{(x - x_0)\left(x + \dfrac{l_1^3 - l_2^3 + (l_1^2 + l_2^2)\, x_0}{l_1^2 + l_2^2 + (l_1 - l_2)\, x_0}\right)}{-(x + l_1)(x - l_2)}$$

oder unter Berücksichtigung von (3) und wenn man abkürzend

$$l_1^3 - l_2^3 + (l_1^2 + l_2^2)\, x_0 = A$$

$$l_1^2 + l_2^2 + (l_1 - l_2)\, x_0 = \frac{hl}{fM}(l_1 + x_0)(l_2 - x_0) = B$$

setzt:

$$(4) \ldots \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2h}{M} \cdot \frac{(x - x_0)\left(x + \dfrac{A}{B}\right)}{-(x + l_1)(x - l_2)}$$

mithin:

$$(5) \quad dt = + \sqrt{\frac{M}{2h}} \cdot \frac{-(x + l_1)(x - l_2)}{\sqrt{-(x - x_0)\left(x + \dfrac{A}{B}\right)(x + l_1)(x - l_2)}} \cdot dx$$

und zwar ist das Vorzeichen der Wurzel positiv zu nehmen, weil in unserm Falle mit wachsendem t auch x wächst, also dx positiv ist. Dagegen hat man sich vor dem Produkte

$$(x - x_0)\left(x + \frac{A}{B}\right)(x + l_1)(x - l_2)$$

das negative Vorzeichen zu verschaffen, damit die Wurzel daraus reell wird; denn von den vier Faktoren ist nur einer $x - l_2$ wirklich negativ; $x + \dfrac{A}{B}$ ist stets positiv, denn es liegt zwischen den Grenzen:

$$x + \frac{l_1^3 - l_2^3 + (l_1^2 + l_2^2)\, l_2}{l_1^2 + l_2^2 + (l_1 - l_2)\, l_2} = x + l_1$$

und

$$x + \frac{l_1^3 - l_2^3 + (l_1^2 + l_2^2)\, \rho}{l_1^2 + l_2^2 + (l_1 - l_2)\, \rho}$$

(worin nach § 15 die oberen Vorzeichen für $m_1 > m_2$ und die unteren für $m_1 < m_2$ zu wählen sind) d. i.

$$= x \mp \rho$$

wie man nach einer leichten Rechnung findet, wenn man für ρ seinen Werth aus § 14

$$\rho = \pm \frac{l_1^{\frac{3}{2}} - l_2^{\frac{3}{2}}}{l_1^{\frac{1}{2}} + l_2^{\frac{1}{2}}}$$

einsetzt. Auch der Grenzwerth $x - \rho$ für die Annahme $m_1 < m_2$ ist stets positiv, weil in diesem Falle nach § 15 der kleinste Werth von x, d. i. x_0, $> + \rho$ ist.

Bezeichnen wir:

$$(6) \ldots \sqrt{-(x - x_0)\left(x + \frac{A}{B}\right)(x + l_1)(x - l_2)} = R$$

so dass

$$(5) \ldots dt = + \sqrt{\frac{M}{2h}} \cdot \frac{(l_1 + x)(l_2 - x)}{R} dx$$

so sind die vier Wurzeln der Gleichung $R^2 = 0$ reell und ihrer Grösse nach geordnet, mit der grössten beginnend:

$$+ l_2, \quad + x_0, \quad - \frac{A}{B}, \quad - l_1$$

da $- \frac{A}{B}$ zwischen $- l_1$ und $\mp \rho$ liegt und $x_0 > \mp \rho$ ist.

Der Werth des x wächst von x_0 bis $+ l_2$, und die zugehörige Zeit ist:

$$(7) \ldots t = + \sqrt{\frac{M}{2h}} \cdot \int_{x_0}^{+ l_2} \frac{(l_1 + x)(l_2 - x)}{R} dx$$

wenn wir die Zeit von $x = x_0$ an zählen.

Aus dem Ausdrucke (4) geht hervor, dass die Geschwindigkeit Null ist für $x = x_0$, wie auch vorausgesetzt wurde, und unendlich gross für $x = + l_2$, d. h. wenn B in A ankommt. Die beiden anderen Werthe, für welche die Geschwindigkeit Null oder unendlich gross wird, $x = - \frac{A}{B}$ und $x = - l_1$, kann x in unserm Falle, wo A zwischen G und B liegen soll, nicht annehmen, und gelten für die Bewegung in negativer Richtung, wenn A zwischen G und C liegt, weil auch dann die Gleichung (1) und somit auch (4) unverändert bestehen bleibt.

§ 17. Reduction des elliptischen Integrales für t auf die Legendre'schen Normalformen der elliptischen Integrale.

Um das elliptische Integral (7):

$$(7) \quad . \quad . \quad . \quad t = + \sqrt{\frac{M}{2h}} \cdot \int_{x_0}^{+l_2} \frac{(l_1 + x)(l_2 - x)}{R} \, dx$$

auf die Normalform zu bringen, bedienen wir uns der Substitution der zweiten Ordnung:

$$(8) \quad . \quad . \quad . \quad z^2 = \sin^2 \varphi = - \mu \frac{x - l_2}{x + l_1}$$

wo

$$\mu = \frac{l_1 + x_0}{l_2 - x_0}$$

Ferner:

$$(9) \quad . \quad . \quad . \quad k_1^2 = \frac{(l_2 - x_0)\left(l_1 - \frac{A}{B}\right)}{\left(l_2 + \frac{A}{B}\right)(l_1 + x_0)} = \frac{l_2}{l_1}\left(\frac{l_2 - x_0}{l_1 + x_0}\right)^2 = \frac{l_2}{l_1 \cdot \mu^2}$$

da:

$$l_1 - \frac{A}{B} = \frac{l\, l_2 (l_2 - x_0)}{l_1^2 + l_2^2 + (l_1 - l_2)\, x_0} = \frac{l\, l_2 (l_2 - x_0)}{B}$$

$$l_2 + \frac{A}{B} = \frac{l\, l_1 (l_1 + x_0)}{B}$$

Dadurch wird:

$$\frac{dx}{R} = - \frac{2}{l_1 + x_0} \sqrt{\frac{B}{l l_1}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k_1^2 z^2)}}$$

wo das Vorzeichen — zu nehmen ist, weil die Substitution so gewählt ist, dass z^2 abnimmt, während x wächst.

Oder:

$$(10) \quad . \quad . \quad . \quad \frac{dx}{R} = - \frac{2}{l_1 + x_0} \sqrt{\frac{B}{l l_1}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi}}$$

Da nach (8):

$$x = \frac{l_2 \mu - l_1 \sin^2 \varphi}{\mu + \sin^2 \varphi}$$

ist, so ergiebt sich:

$$l_1 + x = \frac{l \mu}{\mu + \sin^2 \varphi}$$

$$l_2 - x = \frac{l \sin^2 \varphi}{\mu + \sin^2 \varphi}$$

folglich:

$$t = -\frac{l^2\,\mu}{l_1 + x_0}\sqrt{\frac{2MB}{h\,l\,l_1}}\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{(\mu+\sin^2\varphi)^2\sqrt{1-k_1{}^2\sin^2\varphi}}$$

(Die Grenzen des Integrales, $\frac{\pi}{2}$ und O, findet man leicht aus (8).)

Setzt man hierin für μ und B ihre Werthe ein und bezeichnet:

$$\sqrt{1-k_1{}^2\sin^2\varphi} = \Delta\varphi$$

so erhält man:

$$t = +l^2\sqrt{\frac{2(l_1+x_0)}{f\,l_1\,(l_2-x_0)}}\cdot\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{(\mu+\sin^2\varphi)^2\,.\,\Delta\varphi}$$

Ersetzt man den constanten Ausdruck vor dem Integralzeichen durch C_1 und zerlegt:

$$\frac{\sin^2\varphi}{(\mu+\sin^2\varphi)^2} = -\frac{\mu}{(\mu+\sin^2\varphi)^2}+\frac{1}{\mu+\sin^2\varphi}$$

so wird:

$$t = C_1\left(-\mu\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(\mu+\sin^2\varphi)^2\,\Delta\varphi}+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(\mu+\sin^2\varphi)\,.\,\Delta\varphi}\right)$$

Wir wollen zunächst an Stelle der oberen Grenze $\frac{\pi}{2}$ einen beliebigen Winkel φ, der $< \frac{\pi}{2}$ ist, nehmen und also berechnen:

$$t_\varphi = C_1\left(-\mu V_{-2}+V_{-1}\right)$$

indem wir setzen:

$$V_{-1} = \int_{0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{(\mu+\sin^2\varphi)\,.\,\Delta\varphi}$$

$$V_{-2} = \int_{0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{(\mu+\sin^2\varphi)^2\,.\,\Delta\varphi}$$

Nun ist aber[1]):

$$V_{-2} = \frac{b}{2a} V_{-1} - \frac{k_1^2}{2a} V_1 + \frac{1}{2a} \cdot \frac{\sin\varphi \cos\varphi \Delta\varphi}{\mu + \sin^2\varphi}$$

worin:

$$V_1 = \int_0^{\varphi} \frac{(\mu + \sin^2\varphi)\, d\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$(12.) \quad \begin{cases} a = \mu (1 + \mu) (1 + k_1^2 \mu) = \dfrac{l (l_2 + l_1 \mu)}{l_1 (l_2 - x_0)} \\ b = 1 + 2\mu + 2k_1^2 \mu + 3k_1^2 \mu^2 \\ \quad = \dfrac{l (l_1 + x_0) (l_2 - x_0) + 2l_1 (l_1 + x_0)^2 + 2l l_2 (l_2 - x_0)}{l_1 (l_1 + x_0) (l_2 - x_0)} \end{cases}$$

Folglich:

$$(13) \quad t_\varphi = \frac{C_1}{2a} \left\{ (2a - b\mu) \cdot V_{-1} + \mu \left(k_1^2 V_1 - \frac{\sin\varphi \cos\varphi \Delta\varphi}{\mu + \sin^2\varphi} \right) \right\}$$

$$= \frac{C_1 (l_1 + x_0)}{2l (l_2 + l_1 \mu)} \left\{ (l_1 - l_2) V_{-1} + l_1 \cdot \left(k_1^2 V_1 - \frac{\sin\varphi \cos\varphi \Delta\varphi}{\mu + \sin^2\varphi} \right) \right\}$$

Nach der Bezeichnung Legendre's ist:

$$V_1 = \frac{1 + \mu k_1^2}{k_1^2} F(\varphi) - \frac{1}{k_1^2} E(\varphi)$$

$$V_{-1} = \frac{1}{\mu} \Pi\left(\varphi, \frac{1}{\mu}\right)$$

folglich:

$$(14) \quad \ldots\ldots \quad t_\varphi = \frac{C_1 (l_1 + x_0)}{2l (l_2 + l_1 \mu)} \times$$

$$\left\{ l_1 \left[(1 + \mu k_1^2) F(\varphi) - E(\varphi) - \frac{\sin\varphi \cos\varphi \Delta\varphi}{\mu + \sin^2\varphi} \right] + \frac{l_1 - l_2}{\mu} \Pi\left(\varphi, \frac{1}{\mu}\right) \right\}$$

oder auch:

$$(15) \quad \ldots\ldots \quad t_\varphi = \frac{C_1 (l_2 - x_0)}{2l} \times$$

$$\left\{ F(\varphi) - \frac{1}{1 + \mu k_1^2} \left(E(\varphi) + \frac{\sin\varphi \cos\varphi \Delta\varphi}{\mu + \sin^2\varphi} \right) + \frac{l_1 - l_2}{l_2 + l_1 \mu} \Pi\left(\varphi, \frac{1}{\mu}\right) \right\}$$

Setzen wir jetzt $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so ergiebt sich in der Legendre'schen Bezeichnung:

$$t = \frac{C_1 (l_2 - x_0)}{2l} \cdot \left\{ F' - \frac{1}{1 + \mu k_1^2} \cdot E' + \frac{l_1 - l_2}{l_2 + l_1 \mu} \Pi'\left(\frac{1}{\mu}\right) \right\}$$

---

[1]) Durège Theorie der ellipt. Funct. 2. Aufl. S. 66.

Der Parameter $\frac{1}{\mu} = \frac{l_2 - x_0}{l_1 + x_0}$ ist in unserm Falle stets positiv, wir setzen ihn daher $= \operatorname{ctg}^2\alpha$ und benutzen die Reductionsformel:

$$(16) \ldots \Pi'\left(\frac{1}{\mu}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha \sin^2\varphi)\,\Delta\varphi} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\Delta(\alpha, k_1')} \times$$

$$\left\{ \frac{1}{2}\pi + (F' - E')\,F(\alpha, k_1') - F' \cdot E(\alpha, k_1') + \frac{\Delta(\alpha, k_1')}{\operatorname{ctg}\alpha} F' \right\}$$

worin nach der üblichen Bezeichnung:

$$k_1'^2 = 1 - k_1^2$$

$$\Delta(\alpha, k_1') = \sqrt{1 - k_1'^2 \sin^2\alpha}$$

Mithin wird schliesslich:

$$(17) \ldots\ldots t = \frac{C_1 (l_2 - x_0)}{2l} \times$$

$$\left\{ F' - \frac{1}{1 + \mu k_1^2} E' + \frac{l_1 - l_2}{l_2 + l_1 \mu} \cdot \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\Delta(\alpha, k_1')} \times \left[\frac{1}{2}\pi + (F' - E') \cdot F(\alpha, k_1') - F' \cdot E(\alpha, k_1') + \frac{\Delta(\alpha, k_1')}{\operatorname{ctg}\alpha} \cdot F' \right] \right\}$$

Diese Formel, welche gilt, wenn $m_1 \gtrless m_2$ ist, erfährt eine bedeutende Vereinfachung für den Fall, dass $m_1 = m_2$ ist. Indem wir dann nämlich darin $l_1 = l_2 = \frac{1}{2}$ einsetzen, verschwindet das elliptische Integral dritter Gattung, resp. der dafür nach (16) substituirte Ausdruck, und wir erhalten nach leichter Umformung:

$$t = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{l^2 - 4x_0^2}{fl}} \left\{ F' - \frac{l + 2x_0}{2l} E' \right\}$$

§ 18. Der anziehende Punkt liege so zwischen den Endpunkten der starren Linie, dass die Bewegung in negativer Richtung geschieht.

Bei der Bewegung im negativen Sinne von C nach B hin, die, wie wir sahen, stets eintritt, wenn A zu Anfang zwischen G und C liegt, (Fig. 6 und 7), nimmt x von seinem Anfangswerthe x_0 beständig ab bis zu $-l_1$, d. i. bis C mit A zusammentrifft. Der Anfangswerth x_0 ist für $m_1 > m_2$ stets negativ (Fig. 6), für $m_1 < m_2$ (Fig. 7) kann x_0 positiv, Null oder negativ sein, je nachdem A zwischen G und S, A in S oder A zwischen S und

C liegt; im letzteren Falle hat daher, ebenso wie für $m_1 > m_2$, x nur negative Werthe.

Die erste Reahnung ist hier genau dieselbe wie im § 16, und wir erhalten, unter Beachtung, dass die Reihenfolge der vier reellen Wurzeln der Gleichung $R^2 = 0$, jetzt:

$$+ l_2, \quad - \frac{A}{B}, \quad + x_0, \quad - l_1$$

ist, indem wir mit der grössten beginnen:

$$(7a) \ldots t = - \sqrt{\frac{M}{2h}} \int_{x_0}^{-l_1} \frac{(l_1 + x)(l_2 - x)}{R} \cdot dx$$

Die weitere Rechnung entspricht vollständig der in § 17, wenn wir nur l_1 mit l_2, $l_1 + x_0$ mit $l_2 - x_0$ und $x + l_1$ mit $x - l_2$ und umgekehrt vertauschen. Danach erhalten wir aus (17), indem wir den auch in diesem Falle stets positiven Parameter

$$\frac{1}{\nu} = \frac{l_1 + x_0}{l_2 - x_0} = \operatorname{ctg}^2 \beta$$

setzen:

$$(17a) \ldots \ldots t = \frac{C_2 (l_1 + x_0)}{2l} \times$$

$$\left\{ F' - \frac{1}{1 + \nu k_2^2} E' + \frac{l_2 - l_1}{l_1 + l_2 \nu} \cdot \frac{\sin\beta \cos\beta}{\Delta(\beta, k_2')} \times \right.$$
$$\left. \left[\frac{1}{2} \pi + (F' - E') \cdot F(\beta, k_2') - F' \cdot E(\beta, k_2') + \frac{\Delta(\beta, k_2')}{\operatorname{ctg}\beta} \cdot F' \right] \right\}$$

wo:

$$C_2 = l^2 \sqrt{\frac{2(l_2 - x_0)}{f l_2 (l_1 + x_0)}}$$

$$(9a) \ldots \ldots k_2^2 = \frac{l_1}{l_2} \left(\frac{l_1 + x_0}{l_2 - x_0} \right)^2 = \frac{l_1}{l_2 \nu^2}$$

Ist $m_1 = m_2$, so ergiebt sich für die Zeit aus (17a) die einfachere Gleichung:

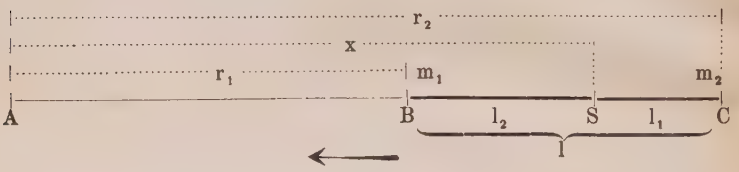
$$t = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{l_2 - 4 x_0^2}{f l}} \cdot \left\{ F' - \frac{l - 2 x_0}{2l} E' \right\}$$

§ 19. Der anziehende Punkt liege ausserhalb der starren Linie in der Richtung derselben.

Wir nehmen jetzt an, dass A, B und C in dieser Reihenfolge in gerader Linie liegen, so befindet sich A ausserhalb BC. Wir bezeichnen wieder (Fig. 8): $AB = r_1$, $AC = r_2$ und AS

$= x$ in einer beliebigen und $= x_0$ in der Anfangslage, für welche die Geschwindigkeit gleich Null vorausgesetzt wird. Dann geschieht

Fig. 8.



die Bewegung der starren Linie BC in negativer Richtung, von C nach B, und währt sicher so lange, bis B in dem Attractionscentrum A angelangt ist. Die Werthe des x nehmen daher beständig ab von $x = x_0$ bis $x = l_2$; zwischen diesen beiden Grenzen kann kein Werth von x mehr liegen, für den die Geschwindigkeit gleich Null wäre. Ferner ist ohne Weiteres klar, dass die Geschwindigkeit des Massenpunktes B für sich allein, als des näheren, grösser sein würde, als die von C für sich allein; dass also die starre Verbindungslinie beider sich mit einer gewissen mittleren, von dem Massenverhältniss der beiden Punkte abhängigen Geschwindigkeit bewegen muss, deren Werth sich aus der bereits im § 11 gefundenen Gleichung ergiebt:

$$M\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2\left[f\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right) - h\right]$$

oder, indem wir:

$$r_1 = x - l_2 \qquad r_2 = x + l_1$$
$$m_1 = \frac{l_1}{l} M \qquad m_2 = \frac{l_2}{l} M$$

einsetzen:

$$(18) \ldots \frac{1}{2} M \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{fM}{l}\left(\frac{l_1}{x - l_2} + \frac{l_2}{x + l_1}\right) - h$$

Für $x = x_0$ ist $\frac{dx}{dt} = 0$, folglich:

$$(19) \ldots 0 = \frac{fM}{l}\left(\frac{l_1}{x_0 - l_2} + \frac{l_2}{x_0 + l_1}\right) - h$$

oder:

$$(20) \ldots h = fM \cdot \frac{x_0 + l_1 - l_2}{(x_0 + l_1)(x_0 - l_2)}$$

Durch Subtraction von (18) und (19) folgt nach einigen Umformungen:

$$(21) \ldots \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\frac{2h}{M} \cdot \frac{(x - x_0)\left(x + \frac{C}{D}\right)}{(x + l_1)(x - l_2)}$$

worin:

$$D = x_0 + l_1 - l_2 = \frac{h}{fM}(x_0 + l_1)(x_0 - l_2)$$

$$C = (l_1 - l_2)x_0 + l_1^2 - l_1 l_2 + l_2^2 = D(l_1 - l_2) + l_1 l_2$$

Aus (21) geht hervor, dass die Geschwindigkeit der starren Linie gleich Null ist für $x = x_0$, wie vorausgesetzt, und unendlich gross für $x = +l_2$, d. h. wenn B in A ankommt. Der andere Werth von x, für den (21) verschwindet, nämlich:

$$-\frac{C}{D} = l_2 - l_1 - \frac{l_1 l_2}{D}$$

ist, da D stets positiv, immer kleiner als $+l_2$ und grösser als $-l_1$, welches letztere man erkennt, indem man für x_0 seinen kleinsten Werth, den es bei dieser Lage annehmen kann, d. i. $+l_2$, in D einsetzt. Den Werth $-\frac{C}{D}$ kann daher x eben so wenig annehmen. wie den Werth $-l_1$, für welchen die Geschwindigkeit auch unendlich gross werden würde, so lange A ausserhalb BC sich befinden soll und bei der gegebenen Anfangslage.

Aus (21) folgt:

$$(22) \quad dt = -\sqrt{\frac{M}{2h}} \cdot \frac{(x + l_1)(x - l_2)}{\sqrt{-(x - x_0)\left(x + \frac{C}{D}\right)(x + l_1)x - l_2)}} \cdot dx$$

und zwar —, weil mit wachsendem t x abnimmt, also dx negativ ist.

Setzen wir:

$$\sqrt{-(x - x_0)\left(x + \frac{C}{D}\right)(x + l_1)(x - l_2)} = R,$$

so dass:

$$dt = -\sqrt{\frac{M}{2h}} \cdot \frac{(x + l_1)(x - l_2)}{R} \cdot dx$$

so ist die Reihenfolge der vier, sämmtlich reellen Wurzeln der Gleichung $R^2 = 0$, von der grössten angefangen:

$$x_0, \quad +l_2, \quad -\frac{C}{D}, \quad -l_1$$

und es ist:

$$x_0 > x > +l_2$$

Von den vier Factoren von R^2 ist daher nur einer, $x - x_0$,

negativ, wodurch sich das negative Vorzeichen unter der Wurzel im Nenner von (22) erklärt.

Aus (22) ergiebt sich durch Integration:

$$(23) \quad . \quad . \quad t = -\sqrt{\frac{M}{2h}} \cdot \int_{x_0}^{+l_2} \frac{(x+l_1)(x-l_2)}{R} \cdot dx$$

und nach der Reduction auf die Normalformen Legendre's:

$$(24) \quad . \quad . \quad t = \frac{C_3}{2\lambda} \left\{ -F' + \frac{1}{1+k^2\lambda} \cdot E' + \frac{x_0 + l_1}{D \cdot \lambda} \Pi'\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right\}$$

wo

$$\lambda = \frac{l}{x_0 - l_2}$$

$$k^2 = \frac{l \cdot l_2}{(D^2 + l_1 l_2)\lambda^2}$$

$$C_3 = l(x_0 + l_1)\sqrt{\frac{2\lambda(x_0 + l_1)}{f(D^2 + l_1 l_2)}}$$

Der Parameter $\frac{1}{\lambda}$ ist auch in diesem Falle stets positiv. Wir setzen:

$$\frac{x_0 - l_2}{l} = \operatorname{ctg}^2 \gamma$$

und erhalten dann nach der Formel (16) im § 17:

$$(25) \quad t = \frac{C_3}{2\lambda} \left\{ -F' + \frac{1}{1+k^2\lambda} \cdot E' + \frac{x_0 + l_1}{D \cdot \lambda} \cdot \frac{\sin\gamma \cos\gamma}{\Delta(\gamma, k')} \times \left[\frac{\pi}{2} + (F' - E') \cdot F(\gamma, k') - F' \cdot E(\gamma, k') + \frac{\Delta(\gamma, k')}{\operatorname{ctg}\gamma} \cdot F' \right] \right\}$$

Ist $m_1 = m_2$, also $l_1 = l_2 = \frac{l}{2}$, so erfährt die Formel (25) nur eine Vereinfachung der darin enthaltenen Constanten, bleibt aber im Wesentlichen ungeändert.

Inhalts-Verzeichniss.

Seite.

§ 1. Einleitung 5

Erster Abschnitt.

Die Bewegung im Raume.

§ 2. Die Differentialgleichungen der Bewegung der beiden beweglichen Punkte bezogen auf den Ort des festen Punktes . 7

§ 3. Vier Integrale der Differentialgleichungen der Bewegung in endlicher Form 8

§ 4. Weitere Folgerungen aus den Differentialgleichungen der §§ 2 und 3 9

§ 5. Bemerkungen über die Lösung des Problems und Bestimmung der Spannkraft λ 12

§ 6. Besondere Annahme über die Werthe der Constanten c_1 c_2 c_3 der Flächenintegrale 13

§ 7. Die Bedingungen, unter welchen der allgemeine Fall des Raumes sich auf den der Ebene reducirt 14

§ 8. Betrachtung der Bewegung des Schwerpunktes der starren Linie im Raume 15

Zweiter Abschnitt.

Die Bewegung in der Ebene.

§ 9. Zusammenstellung der Gleichungen für die Bewegung in der Ebene in rechtwinkligen Coordinaten 17

§ 10. Transformation der rechtwinkligen Coordinaten in andere, welche die Bedingungsgleichung $F = 0$ identisch erfüllen 18

§ 11. Untersuchung der Fälle, in denen der Winkel φ einen constanten Werth α hat 22

§ 12. Die Bedingungen, unter welchen die starre Linie sich in ihrer eigenen Richtung fortbewegt 25

§ 13. Betrachtung der Bewegung des Schwerpunktes der starren Linie in der Ebene 25

Dritter Abschnitt.

Die Bewegung der starren Linie in der eigenen Richtung.

§ 14. Der anziehende Punkt liege innerhalb der beiden beweglichen Punkte so, dass das System sich im Gleichgewicht befindet 28

§ 15. Der anziehende Punkt liege so zwischen den zwei beweglichen Punkten, dass Bewegung stattfinden muss 30

§ 16. Der anziehende Punkt liege so zwischen den Endpunkten der starren Linie, dass die Bewegung in positiver Richtung geschieht 32

§ 17. Reduction des elliptischen Integrales für t auf die Legendre'schen Normalformen der elliptischen Integrale 35

§ 18. Der anziehende Punkt liege so zwischen den Endpunkten der starren Linie, dass die Bewegung in negativer Richtung geschieht 38

§ 19. Der anziehende Punkt liege ausserhalb der starren Linie in der Richtung derselben 39

Wilhelm Hilfer wurde am 16. August 1844 zu Berlin geboren; er besuchte die dortige Gewerbeschule und bestand zu Michaelis 1863 das Maturitäts-Examen. Er studirte hierauf 3 Semester an der Königlichen Gewerbe-Akademie daselbst und hörte die Vorlesungen der Herren: Aronhold, Dove, Grossmann, Manger, Pohlke, Weber, Wiebe. Nach vorbereitendem Privatstudium erwarb er sich dann zu Michaelis 1866 als Extraneus auch vom dortigen Köllnischen Gymnasium das Zeugniss der Reife und widmete sich hierauf bis Michaelis 1870 dem Studium der Mathematik und Physik auf der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin. Am 12. December v. J. legte er vor der Königlichen wissenschaftlichen Prüfungs-Commission daselbst das Examen pro facultate docendi ab. Während seiner Studienzeit auf genannter Universität hörte er die Vorlesungen der Herren: du Bois-Reymond, Foerster, Fuchs, Kronecker, Kummer, Magnus, Poggendorff, Quincke, G. Rose, Trendelenburg, Weierstrass.